

Konservative Abbildungen und Fortsetzung regulärer Maße

von

Jörn Lembcke

aus

Hamburg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Konservative Abbildungen und Fortsetzung regulärer Maße

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Jörn Lembcke

aus

Hamburg

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juni 1969

Dekan: Professor Dr. H. Wegener
Erstberichterstatte: Professor Dr. H. Bauer
Zweitberichterstatte: Professor Dr. K. Jacobs

Inhalt

Seite

Einleitung	1
§ 1 Zerlegung von Inhalten hinsichtlich ihrer Fortsetzbarkeit	4
§ 2 Maximalität und Regularität von Inhalten	14
§ 3 Fortsetzung regulärer Inhalte	23
§ 4 Kompakte Regularitätspaare	27
§ 5 Der Zerlegungssatz für reguläre Inhalte	34
§ 6 Konservative Abbildungen	47
§ 7 Fortsetzung stetiger Abbildungen zu eigentlichen Abbildungen	57
§ 8 Konservativität der stetigen Abbildungen polnischer Räume	61
Literaturverzeichnis	70

Einleitung

Man betrachte eine stetige Abbildung f eines lokal-kompakten Raumes X in einen lokal-kompakten Raum Y . Wie H. BAUER [5] zeigt (vgl. auch HERZ [17]), existieren zu jedem positiven Radonma μ auf dem Bildraum Y zwei eindeutig bestimmte positive Radonmaße μ_f und μ_d auf X mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\mu = \mu_f + \mu_d$,
- (ii) μ_f ist Bild eines Radonmaes auf X unter der Abbildung f ,
- (iii) für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist $\mu_d(f(K)) = 0$.

Die folgende Kennzeichnung der Bildmaße von Radonmaen ist eine Konsequenz der Ergebnisse von BAUER:

Ein Radonma μ auf Y ist genau dann Bildmaß eines Radonmaes auf X unter der Abbildung f , wenn μ bezüglich der Bilder der kompakten Teilmengen von X regulär ist.

Für die abstrakte Maßtheorie soll hier die entsprechende Frage untersucht werden, unter welchen Bedingungen zu einem (σ -additiven) Maß und einer meßbaren Abbildung ein Urbildma existiert. Ist diese Abbildung die Identität einer Menge, so liegt ein Fortsetzungsproblem vor, wie es bei BIERLEIN [7] untersucht wird. Auf die Behandlung eines solchen Fortsetzungsproblems beschränken sich die ersten fünf Paragraphen dieser Arbeit.

Zunächst wird in § 1 analog zum Satz von HERZ und BAUER gezeigt, daß man jedes endliche Maß auf einem σ -Ring eindeutig hinsichtlich seiner Fortsetzbarkeit auf einen größeren σ -Ring zerlegen kann. Bei dem Versuch, die σ -additiv fortsetzbaren Maße so zu kennzeichnen, daß im konkreten Fall entschieden werden kann, ob ein Maß σ -additiv

fortsetzbar ist oder nicht, stößt man jedoch auf erhebliche Schwierigkeiten. Diese zeigen sich besonders deutlich am Problem der Meßbarkeit einer Kardinalzahl, das man als Fortsetzungsproblem im hier betrachteten Sinne deuten kann (vgl. 1.14).

Die Kennzeichnung der Bilder von Radonmaßen durch Regularitätsbedingungen und die Tatsache, daß in vielen wichtigen Fällen die σ -Additivität eines Inhalts aus seiner Regularität folgt, legen es nahe, das Fortsetzungsproblem für reguläre statt für σ -additive Inhalte zu untersuchen (§§ 3-5).

Der vorbereitende § 2 dient dazu, die endlichen, regulären Inhalte als maximale Elemente in einer geeigneten Ordnungsrelation auf der Menge aller endlichen Inhalte zu kennzeichnen. Daran anknüpfend werden in § 6 die Resultate von H. BAUER ([4] und [5]) auf gewisse meßbare Abbildungen abstrakter Meßräume übertragen. Insbesondere ergibt sich eine Verallgemeinerung des oben zitierten Zerlegungssatzes auf stetige Abbildungen allgemeiner Hausdorff-Räume. Die Radonmaße werden dabei durch reguläre Borelmaße ersetzt.

§ 7 enthält die Verallgemeinerung eines topologischen Satzes von H. BAUER [4] über die Fortsetzbarkeit stetiger zu eigentlichen Abbildungen.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird in § 8 gezeigt, daß jede stetige Abbildung eines polnischen Raumes konservativ ist (vgl. Def. 6.3), ein Resultat, das für lokal-kompakte polnische Räume bereits bei H. BAUER [4] zu finden ist.

Den Herren Anger und Janßen vom mathematischen Institut Erlangen danke ich für viele anregende Gespräche und kritische Hinweise.

Mein besonderer Dank gilt meinem verehrten Lehrer
Herrn Professor Dr. H. Bauer, der diese Arbeit durch
eine Reihe wertvoller Ratschläge entscheidend
gefördert hat.

PS: Nachdem diese Arbeit im wesentlichen fertiggestellt
war, wurde ich auf den demnächst erscheinenden Band
BOURBAKI, Intégration, chap. IX aufmerksam gemacht.
Für den Spezialfall beschränkter Maße wird dort das
Korollar (6.11) dieser Arbeit bewiesen.

Unter der gleichen Einschränkung ist bei BOURBAKI der Satz
(8.1) für surjektive Abbildungen zu finden mit einem Beweis,
der von den beiden hier gebrachten abweicht. Er läßt sich
mit Hilfe des Korollars (6.11) ohne Schwierigkeiten auf
nicht beschränkte Borelmaße übertragen.

§ 1 Zerlegung von Inhalten hinsichtlich ihrer

Fortsetzbarkeit

Gegeben seien zwei Ringe $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ von Teilmengen einer Menge X , es gelte $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.

Nach H. Bauer [3] (S. 113, Satz 3.2.5) kann man jeden endlichen Inhalt μ auf $\mathcal{R}_1$ in eindeutiger Weise als Summe eines σ -additiven und eines rein endlich additiven Inhalts darstellen.

In diesem Abschnitt soll analog dazu gezeigt werden, daß man μ eindeutig in zwei endliche Inhalte μ_σ und μ_d zerlegen kann, so daß es zu μ_σ eine σ -additive Fortsetzung gibt, während sämtliche Fortsetzungen von μ_d rein endlich additiv sind. Der ursprüngliche Zerlegungssatz ergibt sich dann als Spezialfall für $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Zur Vorbereitung für den Zerlegungssatz und die weiteren Abschnitte dieser Arbeit werden zunächst einige allgemeine Fortsetzungssätze für Inhalte bewiesen.

(1.1) BEZEICHNUNGEN: Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen einer Menge X heiße Ring bzw. σ -Ring, wenn es gegenüber mengentheoretischen Differenzen und endlichen bzw. abzählbaren Vereinigungen stabil ist. Ist zusätzlich $X \in \mathcal{R}$, so heiße $\mathcal{R}$ Algebra bzw. σ -Algebra.

Eine positive, endlich additive Mengenfunktion

$\mu: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ auf einem Ring $\mathcal{R}$, für die $\mu(\emptyset) = 0$ ist, heiße Inhalt auf $\mathcal{R}$.

Ein σ -additiver Inhalt auf einem σ -Ring heiße Maß.

Ein reellwertiger Inhalt wird auch als endlicher Inhalt bezeichnet.

Die Differenz zweier endlicher Inhalte heiße

signierter Inhalt.

$\mathcal{I}_+ = \mathcal{I}_+(\mathcal{R})$ bzw. $\mathcal{I}_+^e = \mathcal{I}_+^e(\mathcal{R})$ bzw. $\mathcal{I}^e = \mathcal{I}^e(\mathcal{R}) =$
 $= \mathcal{I}_+^e - \mathcal{I}_+^e$ bezeichne die Menge der Inhalte bzw.
 endlichen Inhalte bzw. signierten Inhalte auf $\mathcal{R}$.

Für eine Menge $A \subset X$ sei $1_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definierte Indikatorfunktion von A .

$$E = E(\mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{R_i} : n \in \mathbb{N}; \beta_i \in \mathbb{R}, R_i \in \mathcal{R} \text{ für } i=1, \dots, n \right\}$$

bezeichne den Vektorraum der $\mathcal{R}$ -Treppenfunktionen,

$E_+ = E_+(\mathcal{R})$ den konvexen Kegel der positiven
 $\mathcal{R}$ -Treppenfunktionen.

(1.2) LEMMA: (i) Jedem signierten Inhalt λ auf $\mathcal{R}$ entspricht
 eine eindeutig bestimmte Linearform auf E (die wieder
 mit λ bezeichnet wird), so daß für alle $R \in \mathcal{R}$

$$\lambda(1_R) = \lambda(R) \text{ gilt.}$$

(ii) Diese Linearform ist genau dann positiv auf E_+ ,
 wenn $\lambda \in \mathcal{I}_+^e$ gilt.

(iii) Die Menge der Linearformen auf E , denen ein
 signierter Inhalt auf $\mathcal{R}$ entspricht, stimmt mit dem
 Vektorraum überein, der von den auf E_+ positiven
 Linearformen erzeugt wird.

(iv) $\mathcal{I}^e$ ist bezüglich der durch den Kegel $\mathcal{I}_+^e$
 induzierten Ordnung ein vollständiger Vektorverband.

(v) Durch $\mu(R) \leq \nu(R)$ für alle $R \in \mathcal{R}$ wird auf $\mathcal{I}_+$
 eine Ordnungsrelation definiert. Diese stimmt auf
 $\mathcal{I}_+^e$ mit der Kegelordnung überein.

Die in (iv) und (v) betrachteten Ordnungsrelationen auf
 $\mathcal{I}^e$ bzw. $\mathcal{I}_+$ werden beide mit " $\leq$ " bezeichnet.

Beweis: (i) und ein Teil der Aussage von (ii) sind

Wiederholungen eines Satzes bei Bourbaki [11] (chap. IV, §4, n°9, prop.18), eingeschränkt auf die Menge $\mathcal{J}^e$.

Ist λ positiv auf E_+ , dann auch insbesondere auf der Menge der Indikatorfunktionen von Mengen $R \in \mathcal{R}$. Somit gilt $\lambda \in \mathcal{J}_+^e$, und (ii) ist ganz bewiesen.

(iii) Sei λ eine positive Linearform auf E . Dann wird durch $\tilde{\lambda}(R) = \lambda(1_R)$ ein Inhalt $\tilde{\lambda} \in \mathcal{J}_+^e$ definiert. Wegen (ii) entspricht $\mathcal{J}_+^e$ daher gerade der Menge der positiven Linearformen auf E . Folglich entspricht der von den positiven Linearformen erzeugte Vektorraum dem Vektorraum $\mathcal{J}_+^e - \mathcal{J}_+^e = \mathcal{J}^e$.

(iv) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (iii) in Verbindung mit Bourbaki [11] (chap.II, §2, n°2, th.1), da E ein Rieszscher Raum ist ([11], chap.IV, §4, n°9).

(v) ist trivial. /

(1.3) LEMMA: Sei E ein geordneter reeller Vektorraum, E_0

ein Vektorteilraum von E und p eine verallgemeinerte Halbnorm $(^1)$ auf E , die bezüglich der Ordnung von E isoton ist.

Dann kann man jede Linearform L_0 auf E_0 , die von p majorisiert wird, zu einer positiven Linearform $L \leq p$ auf E fortsetzen. $(^2)$

Beweis: Nach dem Satz von Hahn-Banach (vgl. z.B. Meyer [19], chap.XI, T2) gibt es eine Linearform $L \leq p$, die L_0

$(^1)$ d.i. eine reellwertige Funktion auf E mit den Eigenschaften $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x, y \in E$ und alle $\lambda \geq 0$.

$(^2)$ Auf dieses Lemma wies mich Herr D. Sondermann hin.

fortsetzt. Für ein positives Element $x \in E$ gilt dann wegen der Isotonie von p :

$$L(-x) \leq p(-x) \leq p(0) = 0, \text{ also } L(x) = -L(-x) \geq 0./$$

(1.4) DEFINITION: Sei $\mathcal{G}$ ein System von Teilmengen einer Menge X . Eine Menge $A \subset X$ heiße $\mathcal{G}$ -beschränkt, wenn zu A eine Obermenge aus $\mathcal{G}$ existiert.

(1.5) BEMERKUNG: Ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ein aufsteigend filtrierendes System in X und ist $\mathcal{R}$ ein Ring in X , so ist das System $\mathcal{R}_0$ der $\mathcal{G}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$ wieder ein Ring.

(1.6) LEMMA: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ein aufsteigend filtrierendes System in X . $\mathcal{R}_0$ bezeichne den Ring der $\mathcal{G}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$, μ_0 sei ein Inhalt auf $\mathcal{R}_0$. Dann wird durch

$$\mu(R) := \sup_{R_0 \in \mathcal{R}_0, R_0 \subset R} \mu_0(R_0) \text{ für alle } R \in \mathcal{R}$$

ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ definiert, und zwar der kleinste, der μ_0 fortsetzt. ⁽¹⁾

Ist μ_0 σ -additiv, so ist auch μ σ -additiv.

Beweis: $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ seien zwei disjunkte Mengen, $S \in \mathcal{R}_0$ sei eine Teilmenge von $R := R_1 \cup R_2$.

Aus der Definition von $\mathcal{R}_0$ folgt $R_1 \cap S, R_2 \cap S \in \mathcal{R}_0$, also

$$\mu_0(S) = \mu_0(R_1 \cap S) + \mu_0(R_2 \cap S) \leq \mu(R_1) + \mu(R_2) \text{ und somit}$$

$$\mu(R) \leq \mu(R_1) + \mu(R_2).$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachte man zwei

⁽¹⁾ Der hier verwendete Fortsetzungsproze entspricht der wesentlichen Fortsetzung (prolongement essentiel) eines Maßes bei COURREGE [13] (II.2.3., prop.2).

Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{R}_0$ mit $S_1 \subset R_1$ und $S_2 \subset R_2$. Es ist $S = S_1 \cup S_2 \in \mathcal{R}_0$ sowie $S \subset R$. Daher ergibt sich

$$\mu_0(S_1) + \mu_0(S_2) = \mu_0(S_1 \cup S_2) \leq \mu(R), \text{ also}$$

$$\mu(R_1) + \mu(R_2) \leq \mu(R).$$

Offenbar ist μ die kleinste Fortsetzung von μ_0 .

Es bleibt noch die σ -Additivität von μ für den Fall nachzuweisen, daß μ_0 σ -additiv ist:

Sei $R_1, R_2, \dots \in \mathcal{R}$ eine gegen eine Menge $R \in \mathcal{R}$ aufsteigende Folge, $S \in \mathcal{R}_0$ sei eine Teilmenge von R .

Dann sind auch die Mengen $S_i = S \cap R_i \in \mathcal{R}_0$ ($i=1,2,\dots$), und die Folge S_i wächst gegen S . Damit ergibt sich (vgl.

$$\text{H. BAUER [1], Satz 3.2): } \mu_0(S) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(S_i) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(R_i).$$

Da S eine beliebige Teilmenge von R ist, folgt aus der

$$\text{Definition von } \mu: \mu(R) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(R_i), \text{ also}$$

$$\mu(R) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(R_i). \text{ Folglich ist } \mu \text{ } \sigma\text{-additiv.}$$

(1.7) SATZ: $\mathcal{R}_2$ sei ein Ring auf einer Menge X und $\mathcal{R}_1$ ein Unterring von $\mathcal{R}_2$. μ sei ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{R}_1$. Dann gilt:

(1) μ kann zu einem Inhalt ν auf $\mathcal{R}_2$ fortgesetzt werden.

(2) Ist λ ein Inhalt auf $\mathcal{R}_2$, so daß für alle $R \in \mathcal{R}_1$ $\mu(R) \leq \lambda(R)$ gilt, so kann man μ zu einem Inhalt $\nu \leq \lambda$ auf $\mathcal{R}_2$ fortsetzen.

Beweis: Zunächst wird (2) bewiesen.

$\mathcal{R}_0$ bezeichne den Ring der $\mathcal{R}_1$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}_2$.

Gemäß (1.2) ist μ eine positive Linearform auf dem

Vektorraum $E(\mathcal{R}_1)$ der $\mathcal{R}_1$ -Treppenfunktionen.

$\mathcal{R}_e$ sei der Unterring derjenigen Mengen $R \in \mathcal{R}_0$, für die

$\lambda(R)$ endlich ist. λ_e , die Restriktion von λ auf $\mathcal{R}_e$,

ist eine positive Linearform auf dem Vektorraum $E(\mathcal{R}_e)$.

Durch $p(f) = \inf_{\substack{h \in E_+(\mathcal{K}_2), \\ g+h \geq f}} (\mu(g) + \lambda_e(h))$ für $f \in E(\mathcal{K}_0)$

wird eine isotone verallgemeinerte Halbnorm p auf $E(\mathcal{K}_0)$ definiert.

Sei $f \in E(\mathcal{K}_1)$, $g \in E_+(\mathcal{K}_1)$ und $h \in E_+(\mathcal{K}_e)$, so daß $f \leq g+h$ ist. Dann ist $f-g \leq h$, also $(f-g)^+ \leq h^+ = h$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mu(g) + \mu(f-g) \leq \mu(g) + \mu((f-g)^+) \leq \mu(g) + \lambda_e((f-g)^+) \\ &\leq \mu(g) + \lambda_e(h), \text{ d.h. } \mu(f) \leq p(f). \end{aligned}$$

Es gibt daher eine positive Linearform $\nu_0 \leq p$ auf $E(\mathcal{K}_0)$, die μ fortsetzt. (1.3).

Sei $R \in \mathcal{K}_0$ und $\lambda(R) < \infty$, dann ist $R \in \mathcal{K}_e$, also

$$\nu_0(R) = \nu_0(1_R) \leq p(1_R) \leq \lambda_e(1_R) = \lambda(R).$$

Nach (1.6) kann man ν_0 so zu einem Inhalt ν auf $\mathcal{K}_2$

fortsetzen, daß $\nu \leq \lambda$ ist. Aus

(2) folgt (1), indem man für λ den durch

$$\lambda(R) = \begin{cases} 0 & \text{für } R = \emptyset \\ \infty & \text{für } R \in \mathcal{K}_2 \setminus \{\emptyset\} \end{cases} \text{ definierten Inhalt auf } \mathcal{K}_2$$

wählt./

(1.8) DEFINITION: $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ seien zwei Ringe auf einer Menge X , es gelte $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$.

Ein Inhalt μ auf $\mathcal{K}_1$ heiße $\mathcal{K}_2$ - σ -additiv, wenn eine Fortsetzung von μ zu einem σ -additiven Inhalt auf $\mathcal{K}_2$ existiert.

μ heiße $\mathcal{K}_2$ -rein-endlich-additiv, wenn jeder Inhalt rein endlich additiv ist, der μ auf den Ring $\mathcal{K}_2^1$ der $\mathcal{K}_1$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{K}_2$ fortsetzt.

Dabei soll unter einem rein endlich additiven Inhalt ein solcher Inhalt φ verstanden werden, für den $\lambda = 0$ der einzige von φ majorisierte σ -additive Inhalt ist.

(1.9) BEMERKUNGEN: (i) Falls $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ ist, sind die $\mathcal{R}_2$ - σ -additiven Inhalte auf $\mathcal{R}_1$ genau die σ -additiven und die $\mathcal{R}_2$ -rein-endlich-additiven genau die rein endlich additiven Inhalte auf $\mathcal{R}_1$.

(ii) Sei $\mathcal{R}_3 \supset \mathcal{R}_2$ ein weiterer Ring. Dann gilt: Jeder $\mathcal{R}_3$ - σ -additive Inhalt auf $\mathcal{R}_1$ ist auch $\mathcal{R}_2$ - σ -additiv. Jeder $\mathcal{R}_2$ -rein-endlich-additive Inhalt auf $\mathcal{R}_1$ ist auch $\mathcal{R}_3$ -rein-endlich-additiv.

Zur Begründung dieser letzten Aussage genügt es, darauf hinzuweisen, daß jeder Inhalt $\varphi \neq 0$ auf $\mathcal{R}_3^1$ eine Restriktion $\varphi' \neq 0$ auf $\mathcal{R}_2^1$ hat, da es zu jeder Menge aus $\mathcal{R}_3^1$ eine Obermenge aus $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2^1$ gibt.

(iii) Ein Inhalt $\mu \in \mathcal{I}_+(\mathcal{R}_1)$ ist genau dann $\mathcal{R}_2$ - σ -additiv, wenn er $\mathcal{R}_2^1$ - σ -additiv ist (wegen (ii) und (1.6)).

Bei der Definition der $\mathcal{R}_2$ - σ -Additivität kann also der Ring $\mathcal{R}_2$ durch den Ring $\mathcal{R}_2^1$ ersetzt werden.

(1.10) LEMMA: Sei μ ein endlicher Inhalt auf dem Ring

$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. μ ist genau dann $\mathcal{R}_2$ -rein-endlich-additiv, wenn $\lambda = 0$ der einzige $\mathcal{R}_2$ - σ -additive Inhalt auf $\mathcal{R}_1$ ist, der von μ majorisiert wird.

Beweis: Sei μ $\mathcal{R}_2$ -rein-endlich-additiv und λ $\mathcal{R}_2$ - σ -additiv mit $0 \leq \lambda \leq \mu$.

λ' bezeichne eine σ -additive Fortsetzung von λ , φ eine Fortsetzung von $\mu - \lambda$ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}_2^1$.

Dann ist $\mu' = \varphi + \lambda'$ eine Fortsetzung von μ und daher rein endlich additiv. Daraus folgt $\lambda' = 0$ und damit $\lambda = 0$.

Umgekehrt sei μ' eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{R}_2^1$ und λ' ein σ -additiver Inhalt mit $0 \leq \lambda' \leq \mu'$. λ , die Restriktion von λ' auf $\mathcal{R}_1$, ist der Null-Inhalt, da $\lambda \leq \mu$.

$\mathcal{R}_2$ - σ -additiv ist. Daraus folgt $\lambda' = 0$, da es zu jeder Menge aus $\mathcal{R}_2^1$ eine Obermenge aus $\mathcal{R}_1$ gibt. Somit ist μ $\mathcal{R}_2$ -rein-endlich-additiv./

Das folgende Lemma ist eine Konsequenz des Satzes 3.2.5 bei H. BAUER [3], ein direkter Beweis, der sich fast wörtlich auf die hier vorliegende Situation übertragen läßt, ist bei YOSIDA-HEWITT [21] (th. 1.15) zu finden.

(1.11) LEMMA: Sei μ ein endlicher, σ -additiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$.

Dann ist auch jeder Inhalt λ auf $\mathcal{R}$, der von μ majorisiert wird, σ -additiv.

(1.12) LEMMA: $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ seien zwei Ringe auf einer Menge X .

$\mathcal{V}_{12}^+$ bezeichne die Menge aller $\mathcal{R}_2$ - σ -additiven, endlichen Inhalte auf $\mathcal{R}_1$. Dann gilt:

(i) $\mathcal{V}_{12}^+$ ist linksseitig erblich, d.h. für jeden endlichen Inhalt $\nu \in \mathcal{V}_+^e(\mathcal{R}_1)$ mit $0 \leq \nu \leq \mu \in \mathcal{V}_{12}^+$ gilt $\nu \in \mathcal{V}_{12}^+$.

(ii) $\mathcal{V}_{12}^+$ ist ein konvexer Unterkegel von $\mathcal{V}_+^e(\mathcal{R}_1)$.

(iii) Jede in $\mathcal{V}_+^e(\mathcal{R}_1)$ nach oben beschränkte Teilmenge $N \subset \mathcal{V}_{12}^+$ hat ihr Supremum bzgl. $\mathcal{V}_+^e(\mathcal{R}_1)$ in $\mathcal{V}_{12}^+$.

Beweis: Wegen (1.9.iii) kann $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2^1$ angenommen werden.

(i) Sei $0 \leq \nu \leq \mu \in \mathcal{V}_{12}^+$.

μ_2 sei eine Fortsetzung von μ zu einem σ -additiven Inhalt auf $\mathcal{R}_2$. μ_2 ist ein endlicher Inhalt, da jede Menge aus $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2^1$ in einer Menge aus $\mathcal{R}_1$ enthalten ist. Gemäß

(1.7.2) kann ν zu einem Inhalt $\nu_2 \leq \mu_2$ fortgesetzt werden.

ν_2 ist wieder σ -additiv, folglich ist $\nu \in \mathcal{V}_{12}^+$.

(ii) Seien $\mu, \nu \in \mathcal{V}_{12}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Sind dann μ_2 und ν_2 σ -additive Fortsetzungen von μ bzw. ν auf den Ring $\mathcal{K}_2$, so sind $\mu_2 + \nu_2$ und $\alpha \mu_2$ σ -additive Fortsetzungen von $\mu + \nu$ bzw. $\alpha \mu$. Daraus folgt $\mu + \nu, \alpha \mu \in \mathcal{V}_{12}^+$.

(iii) Sei N eine in $\mathcal{V}_+^e(\mathcal{K}_1)$ nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathcal{V}_{12}^+$. Dann existiert das Supremum $\lambda = \bigvee_{\nu \in N} \nu \in \mathcal{V}_+^e$.

Es ist zu zeigen, daß $\lambda \in \mathcal{V}_{12}^+$ gilt:

S bezeichne die Menge aller σ -additiven Inhalte auf $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^1$, deren Restriktion auf $\mathcal{K}_1$ von λ majorisiert wird.

$(\sigma_i)_{i \in I}$ sei eine Kette in S . Dann wird durch $\tau(R) = \sup_{i \in I} \sigma_i(R)$ für $R \in \mathcal{K}_2$ ein σ -additiver Inhalt τ auf $\mathcal{K}_2$ definiert (vgl. z.B. BERBERIAN [6], sect. 10, th.1). Offenbar ist $\text{Rest}_{\mathcal{K}_1} \tau \leq \lambda$, also $\tau \in S$. Folglich ist S induktiv geordnet.

τ_0 bezeichne ein maximales Element von S und ϑ_0 die Restriktion von τ_0 auf $\mathcal{K}_1$.

Für einen Inhalt $\nu \in N$ ist $\nu \vee \vartheta_0 - \vartheta_0 \leq \nu \in \mathcal{V}_{12}^+$.

Nach (i.) existiert ein σ -additiver Inhalt β auf $\mathcal{K}_2$, der $\nu \vee \vartheta_0 - \vartheta_0$ fortsetzt. $\beta + \tau_0$ ist eine σ -additive Fortsetzung von $\nu \vee \vartheta_0 - \vartheta_0 + \vartheta_0 = \nu \vee \vartheta_0 \leq \lambda$. Damit folgt $\beta + \tau_0 \in S$. Da τ_0 maximal ist und da $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^1$ gilt, muß $\beta = 0$, also $\nu \vee \vartheta_0 = \vartheta_0$ sein, d.h. aber $\nu \leq \vartheta_0$. Es ergibt sich daher $\vartheta_0 \leq \lambda = \bigvee_{\nu \in N} \nu \leq \vartheta_0$ und somit $\lambda \in \mathcal{V}_{12}^+$ ✓

Sei μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{K}_1$. Nach (1.12) ist das Supremum μ_σ aller $\mathcal{K}_2$ - σ -additiven Inhalte $\vartheta \leq \mu$ selbst $\mathcal{K}_2$ - σ -additiv. μ_σ ist daher die größte $\mathcal{K}_2$ - σ -additive Minorante von μ . Jeder $\mathcal{K}_2$ - σ -additive Inhalt $\vartheta \leq \mu_d = \mu - \mu_\sigma$ ist folglich der Null-Inhalt.

Gemäß (1.10) ist μ_d somit ein $\mathcal{K}_2$ -rein-endlich-additiver Inhalt.

Wegen der Maximalität von μ_σ ist die Zerlegung

$\mu = \mu_\sigma + \mu_d$ in einen $\mathcal{K}_2$ - σ -additiven und einen $\mathcal{K}_2$ -rein-endlich-additiven Anteil eindeutig.

Damit ergibt sich der angekündigte Zerlegungssatz:

(1.13) SATZ: Gegeben seien zwei Ringe $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ auf einer Menge X , es gelte $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$.

Dann läßt sich jeder endliche Inhalt μ auf $\mathcal{K}_1$ in eindeutiger Weise als Summe eines $\mathcal{K}_2$ - σ -additiven Inhalts μ_σ und eines $\mathcal{K}_2$ -rein-endlich-additiven Inhalts μ_d darstellen.

Leider hat man im konkreten Falle erhebliche Schwierigkeiten, die Inhalte μ_σ und μ_d zu bestimmen. Das wird am folgenden Beispiel besonders deutlich.

(1.14) BEISPIEL: Sei X eine unendliche Menge, $\mathcal{K}_1$ der Ring der endlichen Teilmengen von X und ihrer Komplemente,

$\mathcal{K}_2 = \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X .

Dann wird durch

$$\mu(R) = \begin{cases} 1, & \text{falls } R \text{ endlich ist} \\ 0, & \text{falls } R \text{ unendlich ist} \end{cases}$$

ein endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{K}_1$ definiert.

Die Fortsetzbarkeit von μ zu einem Maß auf $\mathcal{K}_2$ bedeutet gerade die Meßbarkeit der Kardinalzahl $\text{card}(X)$.

Da die Frage nach der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl noch ungeklärt ist, kann im allgemeinen bisher nicht entschieden werden, ob μ σ -additiv fortsetzbar ist oder nicht, d.h. μ_σ und μ_d können nicht bestimmt werden.

§ 2 Maximalität und Regularität von Inhalten

Die folgende Definition eines Regularitätspaares ist eine Modifikation eines Systems von Axiomen, das BERBERIAN ([6], pp. 186-192, pp. 194-199) zur Behandlung regulärer Maße verwendet. Auf das Axiom V von BERBERIAN wird hier ganz verzichtet, während eine abgeschwächte Form des Axioms VII lediglich implizit in den Voraussetzungen zu verschiedenen Sätzen auftritt. Dabei geht allerdings die von BERBERIAN bewiesene Äquivalenz der Regularität von außen und von innen verloren (vgl. (2.5) und (2.6)).

(2.1) DEFINITION: Sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X .

Ein geordnetes Paar $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ von Mengensystemen $\mathcal{K}, \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ heiße Regularitätspaar, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (I) $\emptyset \in \mathcal{K}$;
- (II) $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}$ sind stabil gegenüber endlichen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen;
- (III) Für alle Mengen $K \in \mathcal{K}$ und $G \in \mathcal{G}$ gilt $K \setminus G \in \mathcal{K}$ und $G \setminus K \in \mathcal{G}$;
- (IV) Jede Menge $K \in \mathcal{K}$ ist $\mathcal{G}$ -beschränkt, d.h. zu K existiert eine Obermenge $G \in \mathcal{G}$.

(2.2) Beispiele für Regularitätspare:

(i) $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ sei stabil gegenüber endlichen Durchschnitten und Vereinigungen, ferner sei $\emptyset \in \mathcal{K}$. $\mathcal{G} := \{[K: K \in \mathcal{K}]\}$ sei das System der Komplemente von Mengen aus $\mathcal{K}$.

Insbesondere kann man für $\mathcal{K}$ das System der abgeschlossenen und für $\mathcal{G}$ das System der offenen Mengen einer Topologie auf X wählen.

- (ii) τ_1, τ_2 seien zwei Hausdorff-Topologien auf X , dabei sei τ_1 feiner als τ_2 .

$\mathcal{K}$ bezeichne das System der τ_1 -kompakten, $\mathcal{Q}$ das System der τ_2 -offenen Teilmengen von X .

- (iii) X sei ein lokal-kompakter topologischer Raum.

$\mathcal{K}$ bezeichne das System der kompakten, $\mathcal{Q}$ dasjenige der relativ-kompakten, offenen Teilmengen von X .

(2.3) Eigenschaften von Regularitätspaaren:

Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ ein Regularitätspaar auf einer Menge X .

Dann gilt:

- (1) Der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring $\mathcal{R}$ besteht aus den endlichen, disjunkten Vereinigungen von Mengen der beiden folgenden Arten:

(α) $G \setminus H$ mit $G, H \in \mathcal{Q}, G \supset H$; (β) F mit $F \in \mathcal{Q}$.

Insbesondere ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$.

- (2) Für eine Menge $C \in \mathcal{K}$ stimmen die beiden Mengensysteme

$\mathcal{Q}_1 := \{C \cap G : G \in \mathcal{Q}\}$ und $\mathcal{Q}_2 := \{C \setminus K : K \in \mathcal{K}\}$ überein.

Beweis: (1) Man kann leicht nachprüfen, daß $\mathcal{R}$ die beschriebene Gestalt hat (vgl. BERBERIAN [6], sect. 58, th.1).

Sei $K \in \mathcal{K}$ und $G \in \mathcal{Q}$ eine Obermenge von K (Axiom IV).

Da nach Axiom III $G \setminus K \in \mathcal{Q}$ ist, folgt $K = G \setminus (G \setminus K) \in \mathcal{R}$.

- (2) $G_0 \in \mathcal{Q}$ bezeichne eine Obermenge von C (Axiom IV).

Für $K \in \mathcal{K}$ ist $C \setminus K = C \cap (G_0 \setminus K)$, also $C \setminus K \in \mathcal{Q}_1$ nach Axiom III.

Für $G \in \mathcal{Q}$ ist $C \cap G = C \setminus (C \setminus G)$, also $C \cap G \in \mathcal{Q}_2$ ebenfalls wegen III.

Daraus folgt $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$.

- (2.4) DEFINITION: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X ,

$\mathcal{K}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ seien beliebig.

Ein Inhalt $\mu \in \mathcal{I}_+(\mathcal{R})$ heiße von innen ($\mathcal{K}$ -)regulär oder auch einfach ($\mathcal{K}$ -)regulär, wenn für alle $R \in \mathcal{R}$

$\mu(R) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset R}} \mu(K)$ ist.

μ heiße von außen ($\mathcal{G}$ -)regulär, wenn für alle $R \in \mathcal{R}$

$\mu(R) = \inf_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ R \subset G}} \mu(G)$ gilt ⁽¹⁾.

(2.5) SATZ: Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ ein Regularitätspaar und $\mathcal{R}$ ein Ring, der $\mathcal{G}$ und damit auch $\mathcal{K}$ enthält.

μ sei ein von innen $\mathcal{K}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{R}$.

Dann gilt für jede Menge $R \in \mathcal{R}$, zu der eine Obermenge

$G \in \mathcal{G}$ mit $\mu(G) < \infty$ existiert:

$$\mu(R) = \inf_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ R \subset G}} \mu(G).$$

Ist μ überdies ein endlicher Inhalt und ist jede

Menge $R \in \mathcal{R}$ $\mathcal{G}$ -beschränkt, so ist μ von außen $\mathcal{G}$ -regulär.

Beweis: Sei $R \in \mathcal{R}$, $G \in \mathcal{G}$ sei eine Obermenge von R , für die $\mu(G)$ endlich ist.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Menge $K \in \mathcal{K}$, so daß $K \subset G \setminus R$ und $\mu(G \setminus R \setminus K) \leq \varepsilon$ ist. Nach Axiom III gilt $G \setminus K \in \mathcal{G}$, ferner ist $R \subset G \setminus K$. Daraus folgt

$$\mu(R) = \mu(G \setminus K) - \mu(G \setminus K \setminus R) \geq \mu(G \setminus K) - \varepsilon$$

und damit die behauptete Gleichung.

Ist μ endlich und jede Menge $R \in \mathcal{R}$ $\mathcal{G}$ -beschränkt, so gilt diese Gleichung für alle $R \in \mathcal{R}$, daher ist μ in diesem Falle von außen $\mathcal{G}$ -regulär./

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, daß nicht jeder von außen $\mathcal{G}$ -reguläre, endliche Inhalt auf dem von $\mathcal{G}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ zugleich von innen $\mathcal{K}$ -regulär ist.

(2.6) BEISPIELE: (i) Im Beispiel (2.2.ii) sei $X = [0, 1]$ das Einheitsintervall, τ_1 die diskrete und τ_2 die

⁽¹⁾ Falls R nicht $\mathcal{G}$ -beschränkt ist, wird $\inf_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ R \subset G}} \mu(G) = \infty$ definiert.

euklidische Topologie.

Dann besteht $\mathcal{K}$ aus den endlichen Teilmengen von X und $\mathcal{G}$ aus den τ_2 -offenen Mengen.

Das Lebesgue-Maß, restringiert auf den von $\mathcal{G}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$, ist offenbar von außen, aber nicht von innen regulär.

(ii) Sei X eine beliebige unendliche Menge, $\tau_1 = \tau_2$ die diskrete Topologie auf X (vgl. 2.2.ii).

Dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{K}$ besteht aus den endlichen Teilmengen von X .

Sei $\mathcal{H}$ ein Ultrafilter in X , der keine endlichen Mengen enthält (ein solcher Ultrafilter ist jeder Ultrafilter, der feiner ist als der Filter, der aus den Komplementen der endlichen Mengen besteht).

Durch
$$\mu(R) := \begin{cases} 1 & \text{für } R \in \mathcal{H} \\ 0 & \text{für } R \notin \mathcal{H} \end{cases}$$
 wird ein endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ definiert.

μ ist von außen regulär, da $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ist, aber nicht von innen.

Sei nun $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ ein Regularitätspaar und $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{G}$ erzeugte Ring. Es soll gezeigt werden, daß die regulären endlichen Inhalte auf $\mathcal{R}$ genau die maximalen Inhalte in einer geeigneten Ordnungsrelation sind.

B bezeichne den konvexen Kegel von $\mathcal{R}$ -Treppenfunktionen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{K_i} - \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{G_j} \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{N}; \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0, \quad K_i \in \mathcal{K}, \\ G_j \in \mathcal{G} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad \text{und alle } j = 1, \dots, m.$$

Offenbar kann bei der Darstellung der Funktionen aus B stets o.B.d.A. $n=m$ angenommen werden.

(2.7) DEFINITION: $<$ bezeichne die folgende Relation

in $\mathcal{Y}^e(\mathcal{R})$:

Für $\mu, \nu \in \mathcal{Y}^e$ soll $\mu \prec \nu$ genau dann gelten, wenn

- (i) für alle $K \in \mathcal{K}$ $\mu(K) \leq \nu(K)$ und
- (ii) für alle $G \in \mathcal{G}$ $\mu(G) \geq \nu(G)$ ist.

(2.8) LEMMA: " $\prec$ " ist eine Ordnungsrelation in $\mathcal{Y}^e(\mathcal{R})$.
Genau dann gilt $\mu \prec \nu$ für zwei Inhalte $\mu, \nu \in \mathcal{Y}^e$,
wenn für alle Funktionen $f \in B$ die Bedingung
 $\mu(f) \leq \nu(f)$ erfüllt ist.

Beweis: Offenbar ist " $\prec$ " eine Prä-Ordnung.

Nach (2.3.1) werden die signierten Inhalte auf $\mathcal{R}$
bereits durch ihre Werte auf $\mathcal{G}$ festgelegt. Folglich ist
" $\prec$ " eine Ordnung.

Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der
Definition von B .

(2.9) LEMMA: (i) Zu jedem endlichen Inhalt $\mu \in \mathcal{Y}_+^e(\mathcal{R})$
existiert ein (in der Ordnungsrelation " $\prec$ ") maximaler
Inhalt $\nu \in \mathcal{Y}_+^e(\mathcal{R})$, so daß $\mu \prec \nu$ ist.

(ii) Ein Inhalt $\mu \in \mathcal{Y}_+^e(\mathcal{R})$ ist genau dann maximal,
wenn für alle $f \in E(\mathcal{R})$

$$\mu(f) = \sup_{b \in B, b \leq f} \mu(b) =: \check{\mu}(f) \text{ gilt.}$$

Dabei bezeichnet $E(\mathcal{R})$ gemäß (1.1) den Vektorraum
der $\mathcal{R}$ -Treppenfunktionen.

Der Beweis des Lemmas ist den Beweisen der entsprechenden
Aussagen für die Ordnungsrelation von BISHOP - de LEEUW
nachgebildet (vgl. BAUER [2], S. 52-55).

Beweis: (i) Nach dem Zornschen Lemma genügt es zu zeigen,
daß $\mathcal{Y}_+^e(\mathcal{R})$ durch " $\prec$ " induktiv geordnet wird:

Sei $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{Y}_+^e$. Zu jedem $K \in \mathcal{K}$ existiert eine

Obermenge $G \in \mathcal{G}$, daher gibt es zu einer gegebenen Funktion $b \in B$ eine Majorante $g \in -B$.

Sei $\mu_0 \in \mathcal{K}$, dann folgt gemäß (2.8) für $\mu \succ \mu_0$ und $\mu \in \mathcal{K}$:
 $\mu(b) \leq \mu(g) \leq \mu_0(g)$. Somit ist die Kette $\{\mu(b) : \mu \in \mathcal{K}\}$
 in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Bezeichnet man den Abschnitts-
 filter der Kette $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{F}$, so gilt für $b \in B$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \mu(b) = \lim_{\mathcal{F}} \mu(b) \in \mathbb{R}. \quad \text{Da wegen (2.3.1)}$$

$E(\mathcal{K}) = B - B$ ist, existiert daher der $\lim_{\mathcal{F}} \mu(f)$
 für alle $f \in E(\mathcal{K})$.

Durch $\lambda(f) := \lim_{\mathcal{F}} \mu(f)$ wird eine positive Linearform
 λ auf $E(\mathcal{K})$ definiert, es gilt $\lambda \succ \mu$ für alle $\mu \in \mathcal{K}$.

(ii) Sei $\mu \in \mathcal{I}_+^e(\mathcal{K})$ ein maximales Element.

Durch $p(f) := \check{\mu}(-f) = \inf_{b \in B, f \leq -b} \mu(-b)$ wird eine isotone

verallgemeinerte Halbnorm p auf $E(\mathcal{K})$ definiert.

Sei $f_0 \in E(\mathcal{K})$. Es existiert eine eindeutig bestimmte
 Linearform ν_0 auf dem von f_0 erzeugten Vektorraum, derart
 daß $\nu_0(f_0) = p(f_0)$ ist. Für eine reelle Zahl $B \geq 0$ gilt

$$\nu_0(B f_0) = B \nu_0(f_0) = B p(f_0) = p(B f_0) \quad \text{sowie}$$

$$\nu_0(-B f_0) = -p(B f_0) \leq p(-B f_0).$$

Gemäß (1.3) kann man ν_0 zu einer positiven Linearform $\nu \leq p$
 auf $E(\mathcal{K})$ fortsetzen. Man erhält dabei für $b \in B$:

$$\nu(-b) \leq p(-b) = \mu(-b) \quad \text{nach der Definition von } p, \text{ also}$$

$$\nu(b) \geq \mu(b). \quad \text{Folglich ist } \mu \prec \nu \text{ und daher } \mu \neq \nu \text{ wegen der}$$

Maximalität von μ .

$$\text{Damit erhält man } \mu(f_0) = \nu_0(f_0) = p(f_0) = \inf_{b \in B, f_0 \leq -b} \mu(-b) = \check{\mu}(-f_0).$$

Da $f_0 \in E(\mathcal{K})$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\mu = \check{\mu}$.

Sei umgekehrt $\mu = \check{\mu}$. $\nu \succ \mu$ sei ein weiterer endlicher Inhalt
 auf $\mathcal{K}$. Für $g \in -B$ ergibt sich dann

$$\mu(g) = \check{\mu}(g) = \sup_{b \in B, b \leq g} \mu(b) \leq \sup_{b \in B, b \leq g} \nu(b) \leq \nu(g), \text{ also}$$

$$\mu(-g) \geq \nu(-g) \quad \text{für alle } -g \in B \text{ und somit } \mu \succ \nu.$$

Folglich ist μ maximal. /

Das vorstehende Lemma ist ein Spezialfall von zwei allgemeinen Sätzen bei CHOQUET [12] (th. 1, 2).

Es soll nun der Zusammenhang zwischen der Regularität eines Inualts μ und der Eigenschaft $\mu = \check{\mu}$ hergestellt werden.

(2.10) LEMMA: Seien $G \in \mathcal{G}$ und $b \in B$, so daß $b \leq 1_G$ ist.

Dann existiert eine Menge $K \in \mathcal{K}$, für die $b \leq 1_K \leq 1_G$ ist.

Beweis: Sei $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{K_i} - \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{G_j}$ mit $\alpha_i, \beta_j \geq 0$

sowie $K_i \in \mathcal{K}$ und $G_j \in \mathcal{G}$ für $i, j = 1, \dots, n$.

Für $x \in \{b > 0\} = \{y \in X: b(y) > 0\}$ setze man

$F_x := \bigcap_{\substack{i=1, \dots, n \\ x \in K_i}} K_i \cap \bigcap_{\substack{j=1, \dots, n \\ x \in G_j}} G_j$. Da $b(x) > 0$ ist, existiert dabei stets ein i , so daß $x \in K_i$ ist.

Nach (2.1.III) gilt $F_x \in \mathcal{K}$. Dann ist aber auch die Menge

$K := \bigcup_{x \in \{b > 0\}} F_x \in \mathcal{K}$, da nur endlich viele verschiedene Mengen F_x auftreten können.

(i) Zu $y \in K$ existiert ein $x \in \{b > 0\}$, so daß $y \in F_x$ ist.

Für diese beiden Elemente $x, y \in X$ und $i, j = 1, \dots, n$ gilt:

Ist $x \in K_i$, so ist $y \in K_i$;

ist $x \in G_j$, so ist auch $y \in G_j$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1_G(y) &\geq b(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{K_i}(y) - \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{G_j}(y) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{K_i}(x) - \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{G_j}(x) = b(x) > 0. \end{aligned}$$

Also ist $1_G(y) = 1$ und somit $y \in G$, d.h. K ist Teilmenge von G .

(ii) Für $y \in K$ ergibt sich aus (i): $1_K(y) = 1_G(y) \geq b(y)$.

(iii) Für $y \notin K$ gilt $1_K(y) = 0$ und $y \notin F_x$ für alle $x \in \{b > 0\}$.

Wäre $b(y) > 0$, so müßte aber $y \in F_y \subset K$ gelten. Folglich ist $b(y) \leq 0 = 1_K(y)$.

Aus (i), (ii) und (iii) folgt die Behauptung./

Es folgt nun der Hauptsatz dieses Paragraphen. Er bildet die Grundlage für die Behandlung des Fortsetzungsproblems bei regulären Inhalten in §§ 3-5.

(2.11) SATZ: Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ ein Regularitätspaar und $\mathcal{K}$ der von $\mathcal{G}$ erzeugte Ring.

Ein endlicher Inhalt $\mu \in \mathcal{T}_+^0(\mathcal{K})$ ist genau dann $\mathcal{K}$ -regulär, wenn er bezüglich der Ordnungsrelation " $<$ " maximal ist.

Beweis: (i) Wenn μ maximal ist, gilt für alle $f \in E = E(\mathcal{K})$:

$\mu(f) = \sup_{b \in B, b \leq f} \mu(b)$ (2.9). Insbesondere folgt wegen (2.10) für alle $G \in \mathcal{G}$:

$$\mu(1_G) = \sup_{b \in B, b \leq 1_G} \mu(b) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset G} \mu(1_K) \leq \mu(1_G), \text{ also}$$

$$(*) \quad \mu(G) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset G} \mu(K).$$

Gemäß (2.3.1) ist jede Menge $R \in \mathcal{K}$ endliche Vereinigung von Mengen der Gestalt F bzw. $G \setminus H$ mit $F, G, H \in \mathcal{G}$. Es genügt daher für eine beliebige Menge der Gestalt F bzw. $G \setminus H$ mit $F, G, H \in \mathcal{G}$ die Regularitätsbedingung nachzuweisen.

(α) Seien $G, H \in \mathcal{G}$. Wegen (*) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $C \in \mathcal{K}$, so daß $C \subset G$ und $\mu(G \setminus C) < \varepsilon$ ist. Nach (2.1.III) gilt $C \setminus H \in \mathcal{K}$. Aus $C \setminus H \subset G \setminus H$ und $(G \setminus H) \setminus (C \setminus H) \subset G \setminus C$ folgt außerdem $\mu((G \setminus H) \setminus (C \setminus H)) < \varepsilon$.

Damit ist die Regularitätsbedingung für $G \setminus H$ bewiesen.

(β) Ist $F \in \mathcal{G}$, so bedeutet (*), angewandt auf F , gerade die Regularitätsbedingung für F .

Aus (α) und (β) folgt die Regularität von μ .

(ii) Sei nun vorausgesetzt, daß μ regulär ist. f sei eine $\mathcal{R}$ -Treppenfunktion. Wegen (2.3.1) kann man f in der folgenden Gestalt schreiben:

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{G_i} - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot 1_{H_j} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}; G_i, H_j \in \mathcal{G} \text{ und}$$

$$\alpha_i, \beta_j \geq 0 \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Wegen der Regularität von μ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$

Mengen $K_i \in \mathcal{K}$ ($i = 1, \dots, n$), für die $K_i \subset G_i$ sowie

$$\mu(G_i \setminus K_i) \leq \epsilon \text{ ist.}$$

Setzt man $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{K_i} - \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot 1_{H_j}$, so folgt:

$$\mu(b) \geq \mu(f) - \epsilon \sum \alpha_i \text{ sowie } b \leq f.$$

Da $b \in B$ ist, bedeutet das $\mu(f) = \sup_{b \in B, b \leq f} \mu(b)$.

Somit ist μ maximal. /

(2.12) KOROLLAR: Sei μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{R}$.

Dann existiert ein regulärer, endlicher Inhalt

ν auf $\mathcal{R}$, so daß $\nu \succ \mu$ ist.

Beweis: Nach (2.9.i) existiert ein maximaler endlicher Inhalt $\nu \succ \mu$. Wegen (2.11) ist ν regulär. /

§ 3 Fortsetzung regulärer Inhalte

(3.1) SATZ: Seien $(\tilde{K}, \mathcal{Q})$ und $(\tilde{K}', \mathcal{Q}')$ zwei Regularitäts-
paare auf einer Menge X , es gelte $\tilde{K}' \subset \tilde{K}$ und $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$.
 $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{R}'$ seien die von $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{Q}'$ erzeugten Ringe.
Dann kann man jeden endlichen $\tilde{K}'$ -regulären Inhalt
 $\mu \in \mathcal{I}_+^0(\mathcal{R}')$ zu einem $\tilde{K}$ -regulären Inhalt $\nu \in \mathcal{I}_+(\mathcal{R})$
fortsetzen.

Beweis: $\tilde{K}_0$ bzw. $\mathcal{Q}_0$ bzw. $\mathcal{R}_0$ bezeichne das System der
 $\mathcal{Q}'$ -beschränkten Mengen aus $\tilde{K}$ bzw. $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{R}$.

$(\tilde{K}_0, \mathcal{Q}_0)$ ist wieder ein Regularitätspaar mit den Eigen-
schaften $\tilde{K}_0 \supset \tilde{K}'$ und $\mathcal{Q}_0 \supset \mathcal{Q}'$. $\mathcal{R}_0$ ist der von $\mathcal{Q}_0$
erzeugte Ring.

μ_0 sei eine Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}_0$ (1.7.1).
Nach Definition von $\mathcal{R}_0$ ist μ_0 endlich.

Sei $\nu_0 \succ \mu_0$ (in der durch das Regularitätspaar $(\tilde{K}_0, \mathcal{Q}_0)$
definierten Ordnung) ein $\tilde{K}_0$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{R}_0$ (2.12).

Für $K' \in \tilde{K}' \subset \tilde{K}$, $G' \in \mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ gilt

$$\nu_0(K') \geq \mu_0(K') = \mu(K') \text{ sowie } \nu_0(G') \leq \mu_0(G') = \mu(G').$$

Das bedeutet aber: $\text{Rest}_{\mathcal{R}'} \nu_0 \succ \mu$ in der durch $(\tilde{K}', \mathcal{Q}')$
definierten Ordnung.

Da μ regulär ist, ist μ in dieser Ordnung maximal (2.11).

Daher ergibt sich $\mu = \text{Rest}_{\mathcal{R}'} \nu_0$. Somit ist ν_0 eine
 $\tilde{K}_0$ -reguläre Fortsetzung von μ .

Nach dem Lemma (1.6) wird durch $\nu(R) = \sup_{R_0 \subset R, R_0 \in \mathcal{R}_0} \nu_0(R_0)$
ein Inhalt ν auf $\mathcal{R}$ definiert, der ν_0 fortsetzt.

Wegen der $\tilde{K}_0$ -Regularität von ν_0 gilt:

$$\nu(R) = \sup_{K \in \tilde{K}_0, K \subset R} \nu_0(K).$$

Folglich ist ν eine $\tilde{K}_0$ -reguläre und damit auch $\tilde{K}$ -reguläre
Fortsetzung von μ . /

(3.2) KOROLLAR: $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{K}', \mathcal{G}')$ seien zwei Regularitätspaare auf einer Menge X , und es gelte $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ sowie $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$.

Der von $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}'$ erzeugte Ring (σ -Ring) sei mit $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$ ($\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{R}'$) bezeichnet.

Jeder $\mathcal{K}$ -reguläre Inhalt auf $\mathcal{K}$, dessen Restriktion auf $\mathcal{K}'$ endlich, σ -additiv und $\mathcal{K}'$ -regulär ist, sei selbst σ -additiv auf dem Ring $\mathcal{K}_0$ der $\mathcal{G}'$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{K}$.

Dann kann man jedes $\mathcal{K}'$ -reguläre Maß μ auf $\mathcal{R}'$, das auf $\mathcal{K}'$ endlich ist, zu einem Maß ν auf $\mathcal{R}$ fortsetzen.

Beweis: Nach (3.1) kann man $\mu_0 = \text{Rest}_{\mathcal{K}'} \mu$ zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Inhalt λ auf $\mathcal{K}$ fortsetzen. λ_0 , die Restriktion von λ auf $\mathcal{K}_0$, ist nach Voraussetzung σ -additiv und kann daher gemäß (1.6) zu einem σ -additiven Inhalt auf $\mathcal{K}$ und somit nach einem bekannten Satz der Maßtheorie (vgl. z.B. COURREGE [13], II.2.2, prop. 1) zu einem Maß ν auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden. Wegen $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_0$ ist ν eine Fortsetzung von μ_0 . Da ferner $\mathcal{R}'$ der von $\mathcal{K}'$ erzeugte σ -Ring und da μ_0 ein endlicher Inhalt ist, muß μ das einzige Maß auf $\mathcal{R}'$ sein, welches μ_0 fortsetzt (COURREGE [13], II.2.2, prop. 1).

Daher ist ν eine Fortsetzung von μ .

Als erstes Anwendungsbeispiel für den Fortsetzungssatz (3.1) soll nun ein Ergebnis von BIERLEIN [7] neu bewiesen werden.

(3.3) SATZ: $\mathcal{R}'$ bezeichne eine σ -Algebra auf einer Menge X . $A_1, A_2, \dots$ sei eine Folge disjunkter Teilmengen von X . Dann gibt es zu jedem endlichen Maß μ auf $\mathcal{R}'$ ein Maß ν auf der von $\mathcal{R}' \cup \{A_1, A_2, \dots\}$ erzeugten σ -Algebra $\mathcal{R}$, welches μ fortsetzt.

Beweis: (i) Sei $A_0 := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Dann bildet die Folge

$A_0, A_1, A_2, \dots$ eine Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen, und es gilt $\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \cap R_i) : R_i \in \mathcal{R}' \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots \right\}$.

(ii) $(\mathcal{R}', \mathcal{R}')$ ist ein Regularitätspaar und μ ist $\mathcal{R}'$ -regulär.

(iii) Sei $\mathcal{K} := \left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap R_k) : R_k \in \mathcal{R}' \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ sowie } R_k \neq \emptyset \text{ höchstens für endlich viele } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$;

außerdem sei $\mathcal{G} := \{K : K \in \mathcal{K}\}$. Dann ist $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ ein Regularitätspaar (2.2.1) und $\mathcal{R}$ ist der von $\mathcal{K}$ und damit von $\mathcal{G}$ erzeugte σ -Ring.

Wegen (3.2) verbleibt zu zeigen, daß jeder $\mathcal{K}$ -reguläre Inhalt λ auf dem von $\mathcal{G}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$, dessen Restriktion auf $\mathcal{R}'$ endlich und σ -additiv ist, selbst wieder σ -additiv ist.

(iv) Zum Nachweis der σ -Additivität eines solchen endlichen Inhalts λ genügt es zu zeigen, daß für jede gegen die leere Menge absteigende Folge (K_n) in $\mathcal{R}$ $\inf \lambda(K_n) = 0$ ist (H. BAUER [1], S. 21, Satz 3.2). Man kann sich dabei sogar auf die Untersuchung von Folgen (K_n) in $\mathcal{K}$ beschränken:

Sei $\varepsilon > 0$. Da λ $\mathcal{K}$ -regulär ist, existiert zu jeder absteigenden Folge (K_n) in $\mathcal{R}$ eine Folge (K'_n) in $\mathcal{K}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $K'_n \subset K_n$ und $\lambda(K_n \setminus K'_n) < \varepsilon / 2^n$ ist. Für die absteigende Folge $(\bigcap_{i=1}^n K'_i)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ gilt daher

$$\lambda(K_n \setminus \bigcap_{i=1}^n K'_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(K_i \setminus K'_i) < \sum_{i=1}^n \varepsilon / 2^i < \varepsilon.$$

(v) Nach der Definition von $\mathcal{K}$ haben die Mengen K_n die Gestalt $K_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap R_k^{(n)})$ mit $R_k^{(n)} \in \mathcal{R}'$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dabei sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ höchstens endlich viele der Mengen $R_k^{(n)}$ nicht leer. Seien $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ diejenigen Indizes k_1 , für die $R_{k_1}^{(1)} \neq \emptyset$ ist. Es genügt zu zeigen, daß für $i = 1, \dots, m$ $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda(K_n \cap A_{k_i}) = 0$ ist.

Wegen der Disjunktheit der Mengen A_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) haben alle Folgen $(K_n \wedge A_{k_i})_{n \in \mathbb{N}}$ die Gestalt $(T_n \wedge A)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei A eine der Mengen A_{k_i} ($i = 1, \dots, m$) und (T_n) eine absteigende Folge in $\mathcal{T}$ bezeichnet, für die

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T_n \wedge A) = \emptyset \text{ ist.}$$

Es ist somit nur noch zu zeigen, daß für jede derartige Folge $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A \wedge T_n) = 0$ gilt.

(vi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\lambda(T_n \wedge A) = \lambda(T_n) + \lambda(A) - \lambda(T_n \cup A).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda(T_n \wedge A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n \wedge A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n) + \lambda(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n \cup A) \\ &= \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) + \lambda(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(T_n \cup A) \quad (\text{wegen } T_n \in \mathcal{T} \text{ für alle } n) \\ &\leq \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) + \lambda(A) - \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T_n \cup A)\right) \\ &= \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) + \lambda(A) - \lambda\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) \cup A\right) \\ &= \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n \wedge A\right) = \lambda(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. /

(3.4) BEMERKUNG: Der vorstehende Satz kann mit den gleichen Methoden sogar für σ -endliche Maße auf σ -Ring(en) anstelle von endlichen Maßen auf σ -Algebren bewiesen werden.

Zur Vereinfachung des Beweises wurde auf diese allgemeinere Formulierung verzichtet.

§ 4 Kompakte Regularitätspaare

Die Anwendung des Korollars (3.2) wird besonders einfach, wenn man weiß, daß bereits jeder $\mathcal{K}$ -reguläre Inhalt σ -additiv ist. Systeme $\mathcal{K}$, für die diese Aussage richtig ist, sind die von E. MARCZEWSKI eingeführten kompakten Systeme (vgl. [18]). Als nächstes soll die Fortsetzbarkeit solcher Inhalte behandelt werden, die bezüglich eines kompakten Systems regulär sind.

Da insbesondere reguläre Borelmaße auf lokal-kompakten topologischen Räumen diese Eigenschaft haben, können die Sätze dieses Paragraphen u.a. dazu benutzt werden, die Ergebnisse von H. BAUER ([4] und [5]) über die Konservativität stetiger Abbildungen lokal-kompakter Räume neu zu beweisen (vgl. § 6).

(4.1) DEFINITION: Ein System $\mathcal{K}$ von Teilmengen einer Menge X heiße kompaktes System, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{K}$.

(ii) Sei (C_n) eine beliebige Folge in $\mathcal{K}$, so daß für jede natürliche Zahl n $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ ist.

Dann gilt auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$. ⁽¹⁾

(4.2) Eigenschaften kompakter Systeme:

$\mathcal{K}$ sei ein kompaktes System von Teilmengen einer Menge X .

Dann gilt:

⁽¹⁾ In der Definition von MARCZEWSKI ([18], p.115) fehlt die Bedingung (i).

Die hier definierten kompakten Systeme heißen bei MEYER [19] (p.55, D3) "pavage semi-compact".

(i) Jede Teilmenge $\mathcal{L}$ von $\mathcal{K}$ mit $\emptyset \in \mathcal{L}$ ist ein kompaktes System.

(ii) $\mathcal{K}'$ bezeichne das kleinste System von Teilmengen von X , das $\mathcal{K}$ enthält und gegenüber endlichen Vereinigungen sowie abzählbaren Durchschnitten stabil ist. Dann ist auch $\mathcal{K}'$ ein kompaktes System.

(iii) μ sei ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \supset \mathcal{K}$. Ist μ auf $\mathcal{K}$ endlich und von innen $\mathcal{K}$ -regulär, so ist μ σ -additiv.

(iv) $\mathcal{K}'$ bezeichne das in (ii) eingeführte kompakte System. Auf einem Ring $\mathcal{R} \supset \mathcal{K}$ sei ein $\mathcal{K}$ -regulärer Inhalt μ gegeben, der auf $\mathcal{K}$ endlich ist.

Dann kann man μ auf genau eine Weise zu einem $\mathcal{K}'$ -regulären Maß auf dem von $\mathcal{K}$ erzeugten σ -Ring $\mathcal{R}'$ fortsetzen.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus der Definition der kompakten Systeme.

(ii) wird bei MEYER [19] (p.55, T4) bewiesen.

(iii) $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{K}$ bezeichne den Ring derjenigen Mengen $R \in \mathcal{R}$, für die $\mu(R) < \infty$ ist. μ_0 sei die Restriktion von μ auf $\mathcal{R}_0$. Da μ $\mathcal{K}$ -regulär und $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_0$ ist, stimmt μ mit der im Lemma (1.6) definierten Fortsetzung von μ_0 auf $\mathcal{R}$ überein ($\mathcal{R}_0$ ist der Ring der $\mathcal{R}_0$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$). Diese Fortsetzung ist aber σ -additiv, falls μ_0 σ -additiv ist.

Die σ -Additivität von μ_0 kann man nach MARCZEWSKI [18] (p.118, (i)) folgendermaßen beweisen:

Sei (R_j) eine absteigende Folge von Mengen aus $\mathcal{R}_0$, so daß für alle natürlichen Zahlen j $\mu_0(R_j) > a > 0$ ist.

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert eine Menge $K_j \in \mathcal{K}$, so daß $K_j \subset R_j$ und $\mu_0(R_j \setminus K_j) < a/2^j$ ist. Folglich gilt

$$\mu_0(R_n \setminus (K_1 \cap \dots \cap K_n)) = \mu_0\left(\bigcap_{j=1}^n R_j \setminus \bigcap_{j=1}^n K_j\right) \leq \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n (R_j \setminus K_j)\right) < a,$$

also $\mu_0(K_1 \cap \dots \cap K_n) > a - a = 0$ und damit

$K_1 \cap \dots \cap K_n \neq \emptyset$ für $n = 1, 2, \dots$

Da $\mathcal{K}$ ein kompaktes System ist, folgt daraus

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Nach H. BAUER [1] (§. 21, Satz 3.2) bedeutet das die

σ -Additivität von μ_0 und damit von μ .

(iv) μ_0 und $\mathcal{R}_0$ seien wie im Beweis von (iii) definiert,

$\mathcal{R}_0$ bezeichne den von $\mathcal{R}_0$ erzeugten σ -Ring, $\mathcal{F}$ den von $\mathcal{R}_0$ erzeugten Halb- σ -Ring (¹).

Da μ_0 auf $\mathcal{R}_0$ endlich ist, kann man μ_0 auf eindeutige Weise zu einem Maß auf $\mathcal{R}_0$ und daher insbesondere zu einem

σ -additiven Inhalt $\mu_{\mathcal{F}}$ auf $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}_0$ fortsetzen.

Es gilt $\mathcal{K}' \subset \mathcal{F}$. $\mathcal{M}$ bezeichne das System derjenigen Mengen

$H \in \mathcal{F}$, für die $\mu_{\mathcal{F}}(H) = \sup_{K \in \mathcal{K}', K \subset H} \mu_{\mathcal{F}}(K)$ ist.

$M_1 \supset M_2 \supset \dots$ sei eine absteigende Folge in $\mathcal{M}$.

Nach DINCULEANU [14] (§ 1.3, cor. of prop. 10) ist die

Menge $M_1 \in \mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ in einer Menge aus $\mathcal{R}_0$ enthalten.

Folglich ist $\mu_{\mathcal{F}}(M_n)$ endlich für alle $n \in \mathbb{N}$, und zu $\varepsilon > 0$

existieren Mengen $K_n \in \mathcal{K}'$, so daß $\mu_{\mathcal{F}}(M_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2^n$ ist.

Daraus folgt

$$\mu_{\mathcal{F}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leq \mu_{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n \setminus K_n)\right) \leq \varepsilon.$$

Daher ist $\mathcal{M}$ stabil gegenüber abzählbaren monotonen

Durchschnitten. Außerdem ist $\mathcal{M}$ offenbar auch stabil

(¹) Ein Halb- σ -Ring (semi-tribe) ist nach DINCULEANU [14] (§ 1.3, def.3) ein Ring, der gegenüber abzählbaren Durchschnitten stabil ist.

gegenüber abzählbaren Vereinigungen aufsteigender Folgen, sofern diese Vereinigungen zu $\mathcal{F}$ gehören.

Wegen $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ muß $\mathcal{M} = \mathcal{F}$ sein (DINCULEANU [14], § 1.5, prop. 16), daher ist $\mu_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{K}'$ -regulär.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\mathcal{F}$ gerade das System der $\mathcal{K}_0$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$ ist:

Jede Menge aus $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{K}_0$ -beschränkt ([14], § 1.3, cor. of prop. 10), und es gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$.

Sei umgekehrt $R_0 \in \mathcal{K}_0$. Dann ist $\mathcal{R} \cap R_0 := \{S' \cap R_0 : S' \in \mathcal{R}\}$ ein σ -Ring, der von dem Ring $\mathcal{R} \cap R_0 = \mathcal{K}_0 \cap R_0 \subset \mathcal{K}_0$ erzeugt wird. Das System $\mathcal{F} \cap R_0 \supset \mathcal{R} \cap R_0$ ist wieder ein Halb- σ -Ring. Da es nur aus Teilmengen von R_0 besteht, ist es sogar stabil gegenüber abzählbaren Vereinigungen ([14], § 1.3, prop. 8) und damit ein σ -Ring.

Daraus folgt $\mathcal{F} \cap R_0 \supset \mathcal{R} \cap R_0$, d.h. jede Teilmenge $S \in \mathcal{R}$ von R_0 gehört zu $\mathcal{F}$.

Damit ist bewiesen, daß $\mathcal{F}$ das System der $\mathcal{K}_0$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$ ist.

Gemäß (1.6) kann man $\mu_{\mathcal{F}}$ zu einem Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{R}$ fortsetzen. $\bar{\mu}$ ist eine $\mathcal{K}'$ -reguläre Fortsetzung von μ_0 . Sei $K' \in \mathcal{K}'$ und sei $R \in \mathcal{R}$. Zu $K' \subset R$ gibt es eine Obermenge $Q_0 \in \mathcal{K}_0$.

Die Menge $R_0 := Q_0 \cap R \in \mathcal{K}_0$ ist ebenfalls Obermenge von K' .

Folglich gilt wegen $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$:

$$\bar{\mu}(R) = \sup_{K' \in \mathcal{K}', K' \subset R} \bar{\mu}(K') = \sup_{R_0 \in \mathcal{K}_0, R_0 \subset R} \bar{\mu}(R_0) = \sup \mu_0(R_0) = \mu(R)$$

Damit ist $\bar{\mu}$ eine $\mathcal{K}'$ -reguläre Fortsetzung von μ .

$\bar{\mu}$ ist die einzige derartige Fortsetzung, da jede $\mathcal{K}'$ -reguläre Fortsetzung von μ σ -additiv ist (ii, iii) und daher auf

$\mathcal{K}' \subset \mathcal{F}$ mit $\mu_{\mathcal{F}}$ übereinstimmt. /

In den folgenden Abschnitten sollen in der Regel nur noch solche kompakten Systeme betrachtet werden, die gegenüber abzählbaren Durchschnitten stabil sind.

Es wird sich herausstellen, daß damit keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit verbunden ist.

(4.3) DEFINITION: Ein Regularitätspaar $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ heiße kompakt, falls $\mathcal{K}$ ein kompaktes System ist, das gegenüber abzählbaren Durchschnitten stabil ist.

(4.4) BEISPIELE: (i) Die in (2.2.ii) und (2.2.iii) definierten Regularitätspaare sind kompakt.

(ii) Sei X eine überabzählbare Menge. $\mathcal{K}$ bezeichne das System von Teilmengen von X , das aus der leeren Menge und den Komplementen der abzählbaren Teilmengen von X besteht; $\mathcal{Q}$ sei das System der Komplemente von Mengen aus $\mathcal{K}$. Dann ist $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ ein kompaktes Regularitätspaar.

(4.5) SATZ: $(\mathcal{L}, \mathcal{Z})$ und $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ seien zwei kompakte Regularitätspaare auf einer Menge X , es gelte $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ und $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Q}$. $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Z}$ bezeichne den von $\mathcal{Z}$ bzw. $\mathcal{Q}$ erzeugten σ -Ring.

Dann kann man jedes $\mathcal{L}$ -reguläre Maß μ auf $\mathcal{R}$, das auf $\mathcal{Z}$ endlich ist, zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Maß auf $\mathcal{Z}$ fortsetzen.

Beweis: $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Q}$ bezeichne den von $\mathcal{Z}$ bzw. $\mathcal{Z}$ erzeugten Ring. Unter $\mathcal{K}_0$ soll das System der $\mathcal{Z}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{L}$ verstanden werden.

$(\mathcal{K}_0, \mathcal{Q})$ ist wieder ein kompaktes Regularitätspaar und $\mathcal{K}_0 \supset \mathcal{L}$. Gemäß (3.1) kann man daher die Restriktion von μ auf $\mathcal{Q}$ zu einem $\mathcal{K}_0$ -regulären Inhalt ν_0 auf $\mathcal{R}$ fortsetzen. $\mathcal{K}_0$ ist ein kompaktes System, das gegenüber abzählbaren

Durchschnitten stabil ist, und es gilt $\nu_0(K) < \infty$ für alle $K \in \mathcal{K}_0$.

Folglich kann ν_0 zu einem $\mathcal{K}_0$ -regulären und somit auch $\mathcal{K}$ -regulären Maß ν auf $\mathcal{Z}$ fortgesetzt werden (4.2.iv).

Da das Maß μ auf $\mathcal{T}$ durch seine Werte auf $\mathcal{Q}$ eindeutig bestimmt wird (COURREGE [13], II.2.2, prop.1), ist ν eine Fortsetzung von μ .

(4.6) BEMERKUNG: Verzichtet man auf die Forderung, daß die kompakten Systeme $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ gegenüber abzählbaren Durchschnitten stabil sind, so läßt sich immerhin noch zeigen, daß μ zu einem Maß ν auf $\mathcal{Z}$ fortgesetzt werden kann (vgl. 3.2). Dagegen kann man im allgemeinen nicht erreichen, daß ν $\mathcal{K}$ -regulär ist.

Für den Aspekt der σ -additiven Fortsetzbarkeit von μ liegt in den zusätzlichen Voraussetzungen über $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ im Satz (4.5) jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit gegenüber der hier betrachteten Situation vor:

Mit $\mathcal{L}^\delta$ bzw. $\mathcal{K}^\delta$ seien die Systeme der abzählbaren Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{K}$ bezeichnet. $\mathcal{Y}^\sigma$ bzw. $\mathcal{Q}^\sigma$ seien die Systeme der $\mathcal{Y}$ - bzw. $\mathcal{Q}$ -beschränkten abzählbaren Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{Y}$ bzw. $\mathcal{Q}$.

Unter Anwendung von (4.2.ii) läßt sich leicht nachprüfen, daß $(\mathcal{L}^\delta, \mathcal{Y}^\sigma)$ und $(\mathcal{K}^\delta, \mathcal{Q}^\sigma)$ kompakte Regularitätspaare sind.

Die von $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Y}^\sigma$ ($\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}^\sigma$) erzeugten σ -Ringe stimmen überein.

Falls das Maß μ auf $\mathcal{T}$ $\mathcal{L}$ -regulär ist, so ist es auch $\mathcal{L}^\delta$ -regulär und kann gemäß (4.5) zu einem Maß ν auf $\mathcal{Z}$ fortgesetzt werden. ν ist dabei sogar $\mathcal{K}^\delta$ -regulär.

Als Anwendungsbeispiel für den Satz (4.5) soll ein Satz von HARDY und LACEY [16] (p.280, th.9) bewiesen werden. Er wird in [16] dazu verwendet, lemme 2 von H.BAUER [5] (p.748) herzuleiten.

(4.7) SATZ: Sei τ eine kompakte Topologie auf einer Menge X , $\mathcal{S}$ sei eine zweite gröbere Topologie auf X . $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{K}$ ($\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{Q}$) bezeichne das System der bezüglich $\mathcal{S}$ bzw. τ abgeschlossenen (offenen) Teilmengen von X ; $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ bzw. $\mathcal{L}_{\tau}$ sei der von $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{Q}$ erzeugte σ -Ring der $\mathcal{S}$ - bzw. τ -Borelschen Mengen in X . Dann kann man jedes $\mathcal{L}$ -reguläre, endliche Maß μ auf $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ zu einem $\mathcal{K}$ -regulären, endlichen Maß auf $\mathcal{L}_{\tau}$ fortsetzen.

Beweis: Da $\mathcal{S}$ gröber als τ ist, gilt $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}$. $\mathcal{K}$ besteht aus den τ -abgeschlossenen, also τ -kompakten Teilmengen von X . Daher ist $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ ein kompaktes Regularitätspaar.

Gemäß (4.2.i) ist auch $\mathcal{L}$ ein kompaktes System. Da $\mathcal{L}$ gegenüber beliebigen Durchschnitten stabil ist, ist auch $(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ ein kompaktes Regularitätspaar.

Nach (4.5) kann man daher μ zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Maß auf $\mathcal{L}_{\tau}$ fortsetzen. Dieses Maß ist endlich, da $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ ist. /

§ 5 Der Zerlegungssatz für reguläre Inhalte

Sei $\mathcal{Q}$ ein Ring und $(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$ ein Regularitätspaar, so daß der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring $\mathcal{R}$ den Ring $\mathcal{Q}$ enthält.

In ähnlicher Weise wie beim Zerlegungssatz (1.13) läßt sich dann zeigen, daß es zu jedem endlichen Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$ einen größten Inhalt $\mu_{\mathcal{R}} \leq \mu$ gibt, der zu einem $\mathcal{R}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden kann.

Auf einen Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet, stattdessen wird ein Spezialfall behandelt, bei dem es möglich ist, die Inhalte $\mu_{\mathcal{R}}$ und $\mu - \mu_{\mathcal{R}}$ in einfacher Weise zu kennzeichnen.

Der Zerlegungssatz von H. BAUER ([5], p.749) wird sich als eine Folgerung der hier bewiesenen Resultate ergeben (vgl. § 6).

(5.1) DEFINITION: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$.

Unter dem äußeren Inhalt μ^* versteht man die durch

$$\mu^*(Z) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } Z \text{ nicht } \mathcal{R}\text{-beschränkt ist} \\ \inf_{R \in \mathcal{R}, Z \subset R} \mu(R), & \text{falls } Z \text{ } \mathcal{R}\text{-beschränkt ist} \end{cases}$$

auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ definierte Mengenfunktion μ^* .

(5.2) EIGENSCHAFTEN von μ^* :

(i) Für je zwei Mengen $Y, Z \subset X$ gilt:

$$\mu^*(Y \cap Z) + \mu^*(Y \cup Z) \leq \mu^*(Y) + \mu^*(Z).$$

(ii) Sei ν ein weiterer Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$.

Dann gilt für die äußeren Inhalte :

$$\mu^*(Z) + \nu^*(Z) = (\mu + \nu)^*(Z) \quad \text{für alle Teilmengen } Z \subset X.$$

Denn: Für jede Menge $Z \subset X$ ist das System der Obermengen aus $\mathcal{R}$ absteigend filtrierend./

- (iii) Sei μ' eine Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$. Dann gilt für alle Mengen $Z \in \mathcal{R}$:
 $(\mu')^*(Z) \leq \mu^*(Z)$.

Denn: Jede Obermenge $R \in \mathcal{R}$ von Z gehört auch zu $\mathcal{R}'$.

- (iv) Sei μ σ -additiv und $\mathcal{R}$ ein σ -Ring.

Dann gilt für jede aufsteigende Folge (Z_n) von Teilmengen von X :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Z_n).$$

Denn: Die Behauptung ist trivial, falls eine der Mengen Z_n nicht $\mathcal{R}$ -beschränkt ist. Andernfalls gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (R_n) in $\mathcal{R}$, so daß $\mu^*(Z_n) + \varepsilon/2^n \geq \mu(R_n)$ sowie $R_n \supset Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Daraus folgt
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right) \leq \mu^*(Z_n) + \sum_{i=1}^n \varepsilon/2^i:$$

Diese Aussage ist offenbar richtig für $n=1$.

Aus ihrer Richtigkeit für $n-1$ folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} R_i\right) + \mu(R_n) - \mu(R_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} R_i) \leq \\ &\leq \mu^*(Z_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon/2^i + \mu^*(Z_n) + \varepsilon/2^n - \mu(R_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} R_i) \leq \mu^*(Z_n) + \sum_{i=1}^n \varepsilon/2^i. \end{aligned}$$

Wegen der σ -Additivität von μ erhält man schließlich

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Z_n) + \varepsilon \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(Z_n).$$

- (v) Sei $A \in \mathcal{R}$. Dann wird durch $\nu(A \cap R) = \mu^*(A \cap R)$ ein Inhalt ν auf dem Ring $\mathcal{R} \cap A = \{R \cap A: R \in \mathcal{R}\}$ definiert.
 Ist μ σ -additiv und $\mathcal{R}$ ein σ -Ring, so ist auch ν σ -additiv.

Denn: Die Mengen $A \cap R$ und $A \cap S$ mit $R, S \in \mathcal{R}$ seien disjunkt.

Da $A \cap S = A \cap (S \setminus R)$ ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß bereits R und S disjunkt sind.

Für jede Obermenge $T \in \mathcal{R}$ von $A \cap (R \cup S)$ gilt dann

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap R) + \mu(T \cap S) \geq \mu^*(A \cap R) + \mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap (R \cup S)).$$

Somit ergibt sich $\mu^*(A \cap (R \cup S)) = \mu^*(A \cap R) + \mu^*(A \cap S)$. Ist μ σ -additiv und $\mathcal{R}$ ein σ -Ring, so folgt die σ -Additivität von ν wegen (iv).

Als nächstes soll die Definition (2.4) verallgemeinert werden:

(5.3) DEFINITION: Sei $\mathcal{K}$ ein beliebiges System von Teilmengen einer Menge X , $\mathcal{R}$ sei ein Ring auf X .

- (i) Ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ heiße $\mathcal{K}$ -regulär, wenn

$\mu(R) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset R} \mu^*(K)$ für alle Mengen $R \in \mathcal{R}$ gilt.

(ii) Ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ heiße $\mathcal{K}$ -diffus, wenn für alle Mengen $K \in \mathcal{K}$, für die $\mu^*(K)$ endlich ist, $\mu^*(K) = 0$ gilt, d.h. wenn $\mu^*(K)$ entweder 0 oder ∞ ist.

(5.4) LEMMA: $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ seien zwei Ringe auf einer Menge X , $\mathcal{K}$ sei ein System von Teilmengen von X . Es gelte $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Dann ist jeder Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$, der zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden kann, selbst $\mathcal{K}$ -regulär.

Beweis: Der $\mathcal{K}$ -reguläre Inhalt ν auf $\mathcal{R}$ sei eine Fortsetzung von μ . Nach (5.2.iii) ergibt sich damit für jedes $Q \in \mathcal{Q}$:

$$\mu(Q) = \nu(Q) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} \nu^*(K) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} \mu^*(K) \leq \mu(Q).$$

Folglich ist μ $\mathcal{K}$ -regulär./

(5.5) LEMMA: Sei $\mathcal{Q}$ ein Ring auf einer Menge X , und sei $\mathcal{K}$ ein System von Teilmengen von X .

Ist dann μ ein $\mathcal{K}$ -regulärer, endlicher Inhalt auf $\mathcal{Q}$ und ist $\nu \leq \mu$ ein weiterer Inhalt auf $\mathcal{Q}$, so ist auch ν $\mathcal{K}$ -regulär.

Beweis: Für jede Teilmenge $Q \in \mathcal{Q}$ von X ist

$$\nu(Q) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} \nu^*(K) \text{ sowie } (\mu - \nu)(Q) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} (\mu - \nu)^*(K).$$

Unter Berücksichtigung von (5.2.ii) folgt daraus:

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \nu(Q) + (\mu - \nu)(Q) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} \nu^*(K) + \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} (\mu - \nu)^*(K) \\ &\geq \sup (\nu^*(K) + (\mu - \nu)^*(K)) = \sup \mu^*(K) = \mu(Q) \end{aligned}$$

und somit $\nu(Q) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset Q} \nu^*(K)$./

(5.6) SATZ: Gegeben seien zwei Regularitätspaare $(\mathcal{L}, \mathcal{J})$ und $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$ auf einer Menge X . $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{R}$ bezeichne den von $\mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{Q}$ erzeugten Ring, es gelte $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ werde überdies die folgende Bedingung erfüllt:

(*) Für je zwei Mengen $C \in \mathcal{L}$ und $K \in \mathcal{K}$ ist $C \cap K \in \mathcal{K}$.
Dann sind für einen $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist, die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) μ kann zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden.
- (ii) μ ist $\mathcal{K}$ -regulär im Sinne der Definition (5.3).

Beweis: ⁽¹⁾ Wegen (5.4) muß nur noch aus (ii) die Eigenschaft (i) gefolgert werden.

$\mathcal{R}_0$ bzw. $\mathcal{Q}_0$ bezeichne den Ring der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Q}$. $\mathcal{M}$ sei die Menge derjenigen $\mathcal{K}$ -regulären Inhalte ν auf $\mathcal{R}_0$, deren Restriktion auf $\mathcal{Q}_0$ von μ majorisiert wird. Wie man leicht sieht, ist $\mathcal{M}$ induktiv geordnet⁽²⁾. Es gibt daher nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $\nu \in \mathcal{M}$. λ bezeichne die Restriktion von ν auf $\mathcal{Q}_0$.

Nach dem Lemma (5.5) ist $\sigma := \text{Rest}_{\mathcal{Q}_0} \mu - \lambda \leq \text{Rest}_{\mathcal{Q}_0} \mu$ ein $\mathcal{K}$ -regulärer und $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{Q}_0$.

Sei $K \in \mathcal{K}$ eine $\mathcal{L}$ -beschränkte Menge, also $K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}_0$.

Für ein System $\mathcal{V}$ von Teilmengen von X soll durch den Index K jeweils das System $\mathcal{V}_K := \{S \cap K : S \in \mathcal{V}\}$ bezeichnet werden.

Die Paare $(\mathcal{L}_K, \mathcal{J}_K)$ und $(\mathcal{K}_K, \mathcal{Q}_K)$ sind wieder Regularitätspaare, und $\mathcal{Q}_K = (\mathcal{Q}_0)_K$ bzw. $\mathcal{R}_K = (\mathcal{R}_0)_K$ sind die von $\mathcal{J}_K$

⁽¹⁾ Die Beweisidee für diesen Satz ist ähnlich wie beim Zerlegungssatz von H. BAUER ([5], p.749).

⁽²⁾ in der von $\mathcal{V}_+(\mathcal{R}_0)$ induzierten Ordnungsrelation $\leq$.

bzw. $\mathcal{Q}_K$ erzeugten Ringe.

Die Regularitätspaare $(\mathcal{L}_K, \mathcal{F}_K)$ und $(\mathcal{K}_K, \mathcal{Q}_K)$ haben folgende Eigenschaften:

(α) $\mathcal{L}_K \subset \mathcal{K}_K \subset \mathcal{K}$, da $K \in \mathcal{K}$ ist, und wegen (*).

(β) $\mathcal{Q}_K = \{K \cdot K' : K' \in \mathcal{K}\}$ nach (2.3.2).

(γ) Es gilt $\mathcal{F}_K \subset \mathcal{Q}_K$; denn:

Da K $\mathcal{L}$ -beschränkt ist, existiert eine Obermenge $C_0 \in \mathcal{L}$ von K .

Für eine Menge $H \in \mathcal{F}$ ergibt sich damit:

$H \cap K = K \setminus (K \setminus H) = K \setminus (K \cap (C_0 \setminus H)) \in \mathcal{Q}_K$ nach (β), da $C_0 \setminus H \in \mathcal{L}$ (Axiom 2.1.III) und daher $K \cap (C_0 \setminus H) \in \mathcal{K}$ ist (*).

Durch $\tau(K \cap Q) := \sigma^*(K \cap Q)$ für $Q \in \mathcal{Q}_0$ wird ein endlicher Inhalt τ auf $\mathcal{Q}_K$ definiert (5.2. v).

τ ist $\mathcal{L}_K$ -regulär: Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $Q \in \mathcal{Q}_0$ existiert eine Menge $C \in \mathcal{L}$, $C \subset Q$, so daß $\sigma(Q) \leq \sigma(C) + \varepsilon$ ist. Dann ist $\tau((Q \setminus C) \cap K) = \sigma^*((Q \setminus C) \cap K) \leq \sigma(Q \setminus C) \leq \varepsilon$.

Damit ergibt sich:

$$\tau(Q \cap K) = \tau(C \cap K) + \tau((Q \setminus C) \cap K) \leq \tau(C \cap K) + \varepsilon.$$

Folglich ist τ $\mathcal{L}_K$ -regulär.

Wegen (α) und (γ) kann τ gemäß (3.1) zu einem $\mathcal{K}_K$ -regulären Inhalt β_K auf $\mathcal{N}_K$ fortgesetzt werden.

Durch $\beta(R) := \beta_K(K \cap R)$ für $R \in \mathcal{N}_0$ wird dann eine Fortsetzung von τ zu einem $\mathcal{K}_K$ -regulären und damit auch $(\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{K})$ -regulären Inhalt β auf $\mathcal{N}_0$ definiert.

Daraus folgt für alle Mengen $Q \in \mathcal{Q}_0$:

$$(\beta + \gamma)(Q) = \sigma^*(K \cap Q) + \gamma(Q) \leq \alpha(Q) + \lambda(Q) = \mu(Q).$$

Somit erhält man $\beta + \gamma \in \mathcal{M}$, also $\beta = 0$ wegen der Maximalität von γ . Insbesondere ist $\beta(K) = \tau(K) = \sigma^*(K) = 0$, und zwar gilt das für jede $\mathcal{L}$ -beschränkte Menge $K \in \mathcal{K}$.

Da σ zugleich $\mathcal{L}$ - und $\mathcal{K}$ -regulär ist, muß $\sigma = 0$, also

$\lambda = \text{Rest}_{\mathcal{Q}_0} \mu$ sein. Aus dem Lemma (1.6) folgt, daß man $\mathcal{G}$ zu einem $(\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{K})$ -regulären und somit auch $\mathcal{K}$ -regulären Inhalt $\bar{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{R}$ fortsetzen kann.

Für jede Menge $Q \in \mathcal{Q}$ gilt daher:

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \mu(C) = \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \lambda(C) \leq \bar{\mathcal{G}}(Q) = \sup_{K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}, K \subset Q} \mathcal{G}(K) \\ &\leq \sup_{K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}, K \subset Q} \mu^*(K) \leq \mu(Q), \end{aligned}$$

d.h. μ wird durch $\bar{\mathcal{G}}$ fortgesetzt. /

(5.7) SATZ: Es werden die Bezeichnungen und allgemeinen Voraussetzungen des Satzes (5.6) verwendet.

Insbesondere sei die Bedingung (*) erfüllt.

Dann gilt:

Jeder $\mathcal{L}$ -reguläre Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist, kann in eindeutiger Weise als Summe zweier $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalte μ_r und μ_d dargestellt werden, derart daß μ_r $\mathcal{K}$ -regulär und μ_d $\mathcal{K}$ -diffus ist.

Für $Q \in \mathcal{Q}$ gilt $\mu_r(Q) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \mu^*(K).$

μ_r ist der größte von μ majorisierte $\mathcal{L}$ -reguläre Inhalt auf $\mathcal{Q}$, der zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden kann.

Beweis: (i) Zunächst wird gezeigt, daß durch

$\nu(Q) := \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \mu^*(K)$ ein Inhalt ν auf $\mathcal{Q}$ definiert wird:

Seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ disjunkte Mengen. Für $i = 1, 2$ seien $K_i \in \mathcal{K}$ und $C_i \in \mathcal{L}$ so gewählt, daß $K_i \subset C_i \subset Q_i$ gilt.

Da μ auf $\mathcal{L}$ endlich ist, gilt $\mu^*(K_1 \cup K_2) < \infty$.

Es gibt daher zu $\varepsilon > 0$ eine Menge $D \in \mathcal{Q}$, so daß $K_1 \cup K_2 \subset D$ und $\mu^*(K_1 \cup K_2) \geq \mu(D) - \varepsilon$ ist.

Damit ergibt sich wegen $K_1 \cup K_2 \subset C_1 \cup C_2 \subset Q_1 \cup Q_2$:

$$\begin{aligned} \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) &\leq \mu(D \cap Q_1) + \mu(D \cap Q_2) \leq \mu(D) \leq \\ &\leq \mu^*(K_1 \cup K_2) + \varepsilon \leq \nu(Q_1 \cup Q_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\nu(Q_1) + \nu(Q_2) \leq \nu(Q_1 \cup Q_2)$.

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung sei wieder eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $K \in \mathcal{K}$ und $C \in \mathcal{L}$ gelte $K \subset C \subset Q_1 \cup Q_2$. Da $\mu(C)$ endlich ist, gibt es für $i = 1, 2$ Mengen $C_i \in \mathcal{L}$, $C_i \subset C \cap Q_i$, so daß $\mu(C \cap Q_1 \setminus C_i) < \varepsilon$ ist. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \mu^*(K) &\leq \mu^*(K \cap Q_1 \cap C) + \mu^*(K \cap Q_2 \cap C) \leq \\ &\leq \mu^*(K \cap C_1) + \mu^*(K \cap (Q_1 \cap C \setminus C_1)) + \mu^*(K \cap C_2) + \mu^*(K \cap (Q_2 \cap C \setminus C_2)) \\ &\leq \mu^*(K \cap C_1) + \varepsilon + \mu^*(K \cap C_2) + \varepsilon \leq \nu(Q_1) + \nu(Q_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da nach (*) $K \cap C_i \in \mathcal{K}$ ist ($i = 1, 2$). Somit gilt

$\nu(Q_1 \cup Q_2) \leq \nu(Q_1) + \nu(Q_2)$, und ν ist folglich ein Inhalt auf $\mathcal{Q}$.

(ii) Aus der Definition von ν folgt, daß ν $\mathcal{L}$ -regulär und $\leq \mu$ ist. ν ist aber auch $\mathcal{K}$ -regulär:

Sei $K \in \mathcal{K}$ $\mathcal{L}$ -beschränkt und $Q \in \mathcal{Q}$ eine $\mathcal{L}$ -beschränkte Obermenge von K . Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $C \in \mathcal{L}$, $C \subset Q$ mit $\mu(Q \setminus C) \leq \varepsilon$.

Wegen (*) erhält man aus der Definition von ν :

$$\begin{aligned} \nu(Q) &\geq \mu^*(K \cap C) \geq \mu^*(K) - \mu^*(K \setminus C) \geq \mu^*(K) - \mu(Q \setminus C) \geq \mu^*(K) - \varepsilon, \\ \text{also } \nu^*(K) &= \mu^*(K). \end{aligned}$$

Folglich ist ν $\mathcal{K}$ -regulär.

(iii) ν ist der größte Inhalt $\leq \mu$, der zugleich $\mathcal{K}$ - und $\mathcal{L}$ -regulär ist:

Sei nämlich $\varrho \leq \mu$ $\mathcal{K}$ - und $\mathcal{L}$ -regulär. Für $Q \in \mathcal{Q}$ gilt dann:

$$\varrho(Q) = \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \varrho(C) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \varrho^*(K) \leq \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \mu^*(K) = \nu(Q).$$

(iv) $\mathcal{Q}_0$ bezeichne den Ring der $\mathcal{K}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{Q}$. Es gilt $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}_0$.

Durch $\lambda_0(Q) := \mu(Q) - \nu(Q)$ für $Q \in \mathcal{Q}_0$ wird ein gemäß (5.5)

$\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt λ_0 auf $\mathcal{Q}_0$ definiert, der nach (1.6) zu einem $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt λ auf $\mathcal{Q}$ fortgesetzt werden kann. Da das System der Teilmengen $C \in \mathcal{L}$ einer Menge $Q \in \mathcal{Q}$ aufsteigend filtrierend ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \mu(C) = \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} (\nu(C) + \lambda(C)) = \\ &= \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \nu(C) + \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \lambda(C) = \nu(Q) + \lambda(Q), \text{ also } \mu = \nu + \lambda. \end{aligned}$$

(v) λ ist $\mathcal{R}$ -diffus:

Durch $\sigma(Q) = \sup_{\substack{L \in \mathcal{R}, C \in \mathcal{L} \\ L \subset C \subset Q}} \lambda^*(L)$ wird gemäß (i) und (ii) ein

$\mathcal{R}$ - und $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt $\sigma \leq \lambda$ auf $\mathcal{Q}$ definiert.

Wegen der Maximalität von ν muß $\sigma = 0$ sein.

Sei $K \in \mathcal{R}$ eine Menge, zueiner Obermenge $Q_0 \in \mathcal{Q}$ mit der Eigenschaft $\lambda(Q_0) < \infty$ existiert.

Dann gilt für jede Teilmenge $C \in \mathcal{L}$ von Q_0 :

$$0 = \sigma(Q_0) \geq \lambda^*(K \cap C) \geq \lambda^*(K) - \lambda^*(K \setminus C) \geq \lambda^*(K) - \lambda(Q_0 \setminus C).$$

Wegen der Regularität von λ bezüglich $\mathcal{L}$ erhält man daraus $\lambda^*(K) = 0$.

(vi) $\mu = \nu + \lambda$ ist die einzige Zerlegung von μ , die die geforderten Eigenschaften besitzt:

Sei $\mu = \nu_1 + \lambda_1$ eine weitere derartige Zerlegung.

Dann ergibt sich für jedes $C \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \sup_{K \in \mathcal{R}, K \subset C} \mu^*(K) = \sup_{K \in \mathcal{R}, K \subset C} (\nu_1^*(K) + \lambda_1^*(K)) = \sup_{K \in \mathcal{R}, K \subset C} \nu_1^*(K) \\ &= \nu_1(C). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\nu(C) = \nu_1(C)$ sowie $\lambda(C) = \lambda_1(C)$ für alle Mengen $C \in \mathcal{L}$. Wegen der $\mathcal{L}$ -Regularität der auftretenden Inhalte muß $\nu = \nu_1$ und $\lambda = \lambda_1$ sein.

(vii) Nach (5.6) ist $\mu_T = \nu$ auch der größte von μ majorisierte $\mathcal{L}$ -reguläre Inhalt auf $\mathcal{Q}$, der zu einem $\mathcal{R}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden kann./

(5.8) LEMMA: Sei $\mathcal{Q}$ ein Ring auf einer Menge X , $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}$ und $\mathcal{K}$ seien zwei weitere Systeme von Teilmengen von X . $\mathcal{K}'$ bezeichne das System der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{K}$.

Dann gilt:

- (1) Ein $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$ ist genau dann $\mathcal{K}$ -regulär, wenn er $\mathcal{K}'$ -regulär ist.
- (2) Wird von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ überdies die Bedingung (5.6(*)) erfüllt, so ist ein $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$ genau dann $\mathcal{K}$ -diffus, wenn er $\mathcal{K}'$ -diffus ist.

Beweis: (1) Jeder $\mathcal{K}'$ -reguläre Inhalt ist auch $\mathcal{K}$ -regulär, da $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ ist.

Sei umgekehrt μ ein $\mathcal{K}$ -regulärer Inhalt.

Dann gilt für jede Menge $Q \in \mathcal{Q}$:

$$\mu(Q) = \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset Q} \mu(C) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \mu^*(K) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}', C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset Q}} \mu^*(K) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}', K \subset Q}} \mu^*(K).$$

(2) Jeder $\mathcal{K}$ -diffuse Inhalt ist auch $\mathcal{K}'$ -diffus.

Sei umgekehrt μ ein $\mathcal{K}'$ -diffuser, $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{Q}$.

Sei $K \in \mathcal{K}$ eine Menge, für die $\mu^*(K)$ endlich ist. $Q \in \mathcal{Q}$ mit $\mu(Q) < \infty$ sei eine Obermenge von K .

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $C \in \mathcal{L}$, so daß $\mu(Q \setminus C) < \varepsilon$ ist. Daraus folgt:

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(K \cap C) + \mu^*(K \setminus C) \leq 0 + \varepsilon, \text{ da } K \setminus C \subset Q \setminus C \text{ und da } K \cap C \in \mathcal{K}' \text{ ist (*).}$$

Folglich ist $\mu^*(K) = 0$.

(5.9) SATZ: Gegeben seien ein Regularitätspaar $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ und ein kompaktes Regularitätspaar $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ auf einer Menge X . $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Z}$ bezeichne den von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{G}$ erzeugten σ -Ring.

Es gelte $\mathcal{R} \subset \mathcal{Z}$; außerdem sei für $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ die Bedingung (5.6(*)) vorausgesetzt.

Dann kann jeder $\mathcal{L}$ -reguläre Inhalt μ auf $\mathcal{R}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist, in eindeutiger Weise als Summe zweier $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalte μ_r und μ_d dargestellt werden, so daß μ_r $\mathcal{K}$ -regulär und μ_d $\mathcal{K}$ -diffus ist. Für jede Menge $S \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu_r(S) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset S}} \mu^*(K).$$

μ_r ist das größte von μ majorisierte $\mathcal{L}$ -reguläre Maß auf $\mathcal{R}$, das zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Maß auf $\mathcal{Z}$ fortgesetzt werden kann.

Beweis: (i) $\mathcal{K}'$ bezeichne das System der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{K}$, sei ferner

$$\mathcal{Q}' = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap H_i) : G_i \in \mathcal{Q}, H_i \in \mathcal{H} \cup \{X\} \text{ für } i = 1, 2, \dots \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{K}'$ bzw. $\mathcal{Q}'$ stabil gegenüber abzählbaren Durchschnitten bzw. abzählbaren Vereinigungen.

Für alle $G \in \mathcal{Q}$ ist $G \in \mathcal{Q}'$, da $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap X)$ ist, wenn man $G_i := G$ wählt ($i = 1, 2, \dots$).

Außerdem gilt $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q}'$:

Da der σ -Ring $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Q}$ erzeugt wird, kann jede Menge aus $\mathcal{Z}$ durch eine Folge von Mengen aus $\mathcal{Q}$ überdeckt werden. Insbesondere existiert zu einer Menge $H \in \mathcal{H}$ eine Folge (G_i) in $\mathcal{Q}$, so daß $H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ ist. Daraus folgt $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap H) \in \mathcal{Q}'$.

Der σ -Ring $\mathcal{Z}$ wird offenbar auch von $\mathcal{Q}'$ erzeugt.

Schließlich ist $(\mathcal{K}', \mathcal{Q}')$ ein kompaktes Regularitätspaar, und $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}'$ erfüllen die Bedingung (*):

Nur das Axiom (2.1.III) ist dabei nicht unmittelbar einzusehen.

Sei $K \in \mathcal{K}'$ und $C \in \mathcal{L}$ eine Obermenge von K . Ferner sei $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap H_i) \in \mathcal{G}'$ mit $G_i \in \mathcal{G}$ und $H_i \in \mathcal{H} \vee \{X\}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Offenbar ist $G \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((G_i \setminus K) \cap H_i) \in \mathcal{G}'$.

Umgekehrt gilt:

$$K \setminus G = K \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{L}G_i \cup \mathcal{L}H_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (K \cap (\mathcal{L}G_i \cup \mathcal{L}H_i)).$$

Für $i \in \mathbb{N}$ ist $K \cap (\mathcal{L}G_i \cup \mathcal{L}H_i) = (K \setminus G_i) \cup (K \cap (C \setminus H_i)) \in \mathcal{K}'$ nach Axiom III und wegen $(*)$.

Da $\mathcal{K}'$ stabil gegenüber abzählbaren Durchschnitten ist, folgt $K \setminus G \in \mathcal{K}'$.

(ii) Mit $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{K}$ wird der von $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{G}'$ erzeugte Ring bezeichnet.

Da $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}'$ ist, folgt $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$.

Gemäß (5.7) kann $\mu^{\circ} := \text{Rest}_{\mathcal{G}} \mu$ als Summe $\mu^{\circ} = \mu_R^{\circ} + \mu_d^{\circ}$ eines $\mathcal{L}$ - und $\mathcal{K}$ -regulären Inhalts μ_R° und eines $\mathcal{L}$ -regulären und $\mathcal{K}'$ -diffusen Inhalts μ_d° dargestellt werden. Dabei kann man μ_R° zu einem $\mathcal{K}'$ -regulären Inhalt ν auf $\mathcal{K}$ fortsetzen.

ν ist endlich auf $\mathcal{K}'$, da die Mengen aus $\mathcal{K}'$ $\mathcal{L}$ -beschränkt sind. Da $\mathcal{K}'$ stabil gegenüber endlichen Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten ist, kann ν nach (4.2.iv) auf genau eine Weise zu einem $\mathcal{K}'$ -regulären Maß λ auf $\mathcal{K}$ fortgesetzt werden.

(iii) Sei $A \subset X$ und $\mu^{\circ*}(A)$ endlich.

Dann gilt $\mu^{\circ*}(A) = \mu^*(A)$: Sei $Q \in \mathcal{G}$, $\mu^{\circ}(Q) < \infty$ und Q sei eine Obermenge von A , ferner sei $A \subset S \subset Q$ und $S \in \mathcal{K}$. Dann existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Menge $C \in \mathcal{L}$, $C \subset Q \setminus S$, so daß $\mu(Q \setminus S \setminus C) \leq \varepsilon$ ist (wegen der $\mathcal{L}$ -Regularität von μ). Folglich ist $\mu(S) \geq \mu(Q \setminus C) - \varepsilon$ und $S \subset Q \setminus C$.

Daraus ergibt sich $\mu^{\circ*}(A) \leq \mu^{\circ}(Q \setminus C) = \mu(Q \setminus C) \leq \mu(S) + \varepsilon$, also $\mu^{\circ*}(A) = \mu^*(A)$ wegen $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$.

(iv) $\mu_r = \text{Rest}_r \lambda$ ist eine Fortsetzung von μ_r^0 auf den σ -Ring $\mathcal{V}$. Es ist zu zeigen, daß μ_r $\mathcal{L}$ -regulär ist:

Für jede Menge $S \in \mathcal{V}$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_r(S) &= \lambda(S) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset S} \lambda(K) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_r^{0*}(K) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu^{0*}(K) \\ &= \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu^*(K) \leq \mu(S). \end{aligned}$$

Daher ist gemäß (5.5) die Restriktion $\mu_r^{\mathcal{L}}$ von μ_r auf den Ring $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{V}$ $\mathcal{L}$ -regulär.

Da die Mengen aus $\mathcal{L}'$ $\mathcal{L}$ -beschränkt sind, folgt daraus für eine beliebige Menge $S \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \mu_r(S) &= \sup_{K \in \mathcal{K}', K \subset S} \lambda(K) = \sup_{C' \in \mathcal{L}} \lambda(C' \cap S) = \sup_{C' \in \mathcal{L}} \mu_r^{\mathcal{L}}(C' \cap S) \\ &= \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset S} \mu_r^{\mathcal{L}}(C) = \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset S} \mu_r(C). \end{aligned}$$

(v) Für $S \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ setze man $\mu_d^{\mathcal{L}}(S) := \mu(S) - \mu_r(S)$.

μ_d bezeichne die gemäß (1.6) definierte Fortsetzung von $\mu_d^{\mathcal{L}}$ auf den σ -Ring $\mathcal{V}$.

Der Inhalt $\mu_d^{\mathcal{L}}$ ist $\mathcal{L}$ -regulär, da er von einem endlichen, $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt majorisiert wird (5.5). Folglich ist auch μ_d $\mathcal{L}$ -regulär.

Auf $\mathcal{L}$ stimmen μ_d^0 und μ_d überein. Da beide Inhalte $\mathcal{L}$ -regulär sind, ist μ_d eine Fortsetzung von μ_d^0 , und es gilt $\mu = \mu_r + \mu_d$.

(vi) μ_d ist $\mathcal{L}'$ -diffus, da μ_d^0 $\mathcal{L}'$ -diffus ist und da $\mu_d^{0*} \geq \mu_d^*$ ist (5.2.iii). Nach dem Lemma (5.8) ist μ_d dann auch $\mathcal{L}$ -diffus.

μ_r ist $\mathcal{L}'$ -regulär nach (5.4), da μ_r durch das $\mathcal{L}'$ -reguläre Maß λ auf $\mathcal{Z}$ fortgesetzt wird.

Daher gilt für alle Mengen $S \in \mathcal{V}$ die behauptete Gleichung:

$$\begin{aligned} \mu_r(S) &= \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset S}} \mu_r^*(K) \leq \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset S}} \mu^*(K) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ K \subset C \subset S}} \mu^{0*}(K) \quad (\text{iii}) \\ &\leq \sup_{C \in \mathcal{L}, C \subset S} \mu_r^0(C) \leq \mu_r(S). \end{aligned}$$

(vii) Nach (iii) stimmen die äußeren Inhalte $\mu^{\circ*}$ und μ^* insbesondere für Mengen aus $\mathcal{K}'$ überein. Mit der gleichen Begründung läßt sich zeigen, daß auch $\mu_r^{\circ*}$ und μ_r^* sowie $\mu_d^{\circ*}$ und μ_d^* auf $\mathcal{K}'$ übereinstimmen.

Da μ_r und μ_d bereits durch ihre Werte auf $\mathcal{K}'$ festgelegt sind, folgen daher bei Berücksichtigung des Lemmas (5.8) die Maximalitätseigenschaft von μ_r und die Eindeutigkeit der Zerlegung von μ aus den entsprechenden Eigenschaften von μ_r° und μ_d° . /

§ 6 Konservative Abbildungen

Die bisher gewonnenen Ergebnisse sollen nun dazu verwendet werden, die Resultate von H. BAUER (vgl. [4] und [5]) über die Konservativität stetiger Abbildungen lokal-kompakter Räume auf abstrakte Maßräume und allgemeine Hausdorff-Räume zu erweitern.

(6.1) DEFINITION: $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Q}$ sei ein Ring auf einer Menge X bzw. Y .

(1) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heiße $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ -meßbar, wenn für alle Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ $f^{-1}(Q) \in \mathcal{R}$ gilt.

(2) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ -meßbare Abbildung und ν ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Der durch $\mu(Q) := \nu(f^{-1}(Q))$ auf $\mathcal{Q}$ definierte Inhalt $f(\nu) := \mu$ heiße f -Bild von ν oder Bildinhalt von ν unter der Abbildung f .

(3) Sei $\mathcal{K}$ eine Teilmenge des Ringes $\mathcal{R}$ auf X . Ein Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$ heiße f -darstellbar bzw. f -diffus (bzgl. $(\mathcal{R}, \mathcal{K})$), wenn μ das f -Bild eines $\mathcal{K}$ -regulären Inhalts auf $\mathcal{R}$ ist bzw. wenn $\mu^*(f(K)) = 0$ für diejenigen Mengen $K \in \mathcal{K}$ gilt, für die $\mu^*(f(K))$ endlich ist.

(6.2) DEFINITION: $\mathcal{Q}$ sei ein Ring auf einer Menge Y , $\mathcal{L}$ eine Teilmenge von $\mathcal{Q}$ und μ ein $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{Q}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist. μ heiße von einer Menge $A \subset Y$ getragen bzw. schwach getragen (bzgl. $\mathcal{L}$), wenn für alle Mengen $C \in \mathcal{L}$ $\mu^*(C \setminus A) = 0$ bzw. $\mu^*(C \cap A) = \mu(C)$ gilt.

(6.3) DEFINITION: $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Q}$ sei ein Ring auf einer Menge X bzw. Y . $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{L}$ bezeichne eine Teilmenge des Ringes $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Q}$. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heiße konservativ bzw. stark konservativ (bzgl. $(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$), wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) f ist $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ -meßbar.

(ii) Jeder $\mathcal{L}$ -reguläre Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist und von $f(X)$ getragen wird bzw. schwach getragen wird, ist f -darstellbar bzgl. $(\mathcal{R}, \mathcal{K})$.

(6.4) BEMERKUNG: Jeder Inhalt μ auf $\mathcal{Q}$, der von einer Menge $A \subset Y$ getragen wird, wird von ihr auch schwach getragen, da in diesem Falle $\mu(C) \leq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A) \leq \mu(C)$ gilt. Somit ist jede stark konservative Abbildung konservativ.

Das folgende Beispiel soll zeigen, daß die Umkehrungen der vorstehenden Aussagen nicht einmal für Borelmaße auf lokal-kompakten Räumen zutreffen.

(6.5) BEISPIEL: Sei $Y := [0,1] \subset \mathbb{R}$ das Einheitsintervall, $\mathcal{Q}$ der σ -Ring der Borelschen Teilmengen von Y , $\mathcal{L}$ das System der kompakten Teilmengen von Y , λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{Q}$. $X \subset Y$ bezeichne eine nicht-Lebesgue-meßbare Menge mit der Eigenschaft $\lambda(B) = \lambda^*(B \cap X) = \lambda^*(B \setminus X)$ für alle $B \in \mathcal{Q}$ (vgl. HALMOS [15], sect. 16, th. E). Dann wird λ von X schwach getragen, aber nicht getragen.

X sei mit der diskreten Topologie versehen. $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$ bezeichne den σ -Ring der Borelschen, $\mathcal{K}$ das System der kompakten und damit endlichen Teilmengen von X . Offenbar ist die kanonische Injektion $f: X \rightarrow Y$ $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ -meßbar, und es gilt $\lambda(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Daher kann λ nicht das f -Bild eines $\mathcal{K}$ -regulären Maßes auf $\mathcal{R}$ sein. Da λ von $X = f(X)$ schwach getragen wird, ist f nicht stark konservativ.

Sei $\mu = h \cdot \lambda$ ein reguläres Borelmaß auf Y mit Dichtefunktion h bezüglich λ , das von $X = f(X)$ getragen wird. Dann gilt für die Menge $H := \{y \in Y: h(y) > 0\} \in \mathcal{Q}$: $\mu^*(H \cap X) \leq \mu^*(Y \setminus X) = 0$ und somit $\lambda(H) = \lambda^*(H \cap X) = 0$, also ist μ das Nullmaß.

Folglich ist jedes reguläre Borelmaß μ auf Y , das von $X = f(X)$ getragen wird, abzählbare Linearkombination von Einheitsmassen auf X und daher Bild eines regulären Borelmaßes auf X . Folglich ist f eine konservative Abbildung.

(6.6) SATZ: Gegeben seien zwei Regularitätspaare $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ bzw. $(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ auf zwei Mengen Y bzw. X .

$\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{K}$ seien die von $\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{J}$ erzeugten Ringe.

Ferner sei $f: X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{K}$ - $\mathcal{I}$ -meßbare Abbildung, die die folgende Bedingung erfüllt:

(S) Für je zwei Mengen $C \in \mathcal{L}$ und $K \in \mathcal{K}$ gilt $K \cap f^{-1}(C) \in \mathcal{K}$.

Dann kann man jeden $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt μ auf $\mathcal{I}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist, in eindeutiger Weise als Summe eines (bzgl. $(\mathcal{K}, \mathcal{K})$) f -darstellbaren, $\mathcal{K}$ -regulären Inhalts μ_1 und eines f -diffusen, $\mathcal{L}$ -regulären Inhalts μ_2 schreiben.

Dabei gilt für alle Mengen $Q \in \mathcal{I}$:

$$\mu_1(Q) := \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ f(K) \subset C \subset Q}} \mu^*(f(K)).$$

Ein $\mathcal{L}$ -regulärer, auf $\mathcal{L}$ endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{I}$ ist genau dann f -darstellbar, wenn für alle $Q \in \mathcal{I}$

$$\mu(Q) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ f(K) \subset C \subset Q}} \mu^*(f(K)) \text{ ist, d.h. wenn } \mu \text{ zugleich}$$

regulär bezüglich des Systems $f(\mathcal{K}) := \{f(K): K \in \mathcal{K}\}$ ist.

Da die Beweise der Sätze (6.6) und (6.7) vollkommen analog verlaufen, wird auf den Beweis des vorstehenden Satzes verzichtet.

(6.7) SATZ: Gegeben seien ein Regularitätspaar $(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ auf einer Menge Y und ein kompaktes Regularitätspaar $(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ auf einer Menge X . $\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{J}$ bezeichne den von $\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{J}$ erzeugten σ -Ring.

$f: X \rightarrow Y$ sei eine $\mathcal{G}$ - $\mathcal{T}$ -meßbare Abbildung, die die Bedingung (6.6(S)) erfüllt.

Dann kann man jeden $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt μ auf $\mathcal{T}$, der auf $\mathcal{L}$ endlich ist, in eindeutiger Weise als Summe eines (bzgl. $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$) f -darstellbaren, $\mathcal{L}$ -regulären Maßes μ_1 und eines f -diffusen, $\mathcal{L}$ -regulären Inhalts μ_2 schreiben.

Für jedes $S \in \mathcal{T}$ gilt: $\mu_1(S) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{L}, G \in \mathcal{L} \\ f(K) \subset G \subset S}} \mu^*(f(K)).$

Ein auf $\mathcal{L}$ endli-

cher, $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt μ auf $\mathcal{T}$ ist genau dann f -darstellbar, wenn für alle $S \in \mathcal{T}$

$\mu(S) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{L}, G \in \mathcal{L} \\ f(K) \subset G \subset S}} \mu^*(f(K))$ gilt, d.h., wenn μ zugleich $f(\mathcal{L})$ -regulär ist.

Beweis: (i) Nach (5.2. v) wird durch

$\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(S \cap f(X)) := \mu^*(S \cap f(X))$ ein Inhalt auf dem Ring der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus dem σ -Ring $\mathcal{T} \cap f(X) := \{S \cap f(X) : S \in \mathcal{T}\}$ definiert. Dann ist durch $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}(S) := \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(S \cap f(X))$ ein Inhalt $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$ auf dem Ring der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{T}$ gegeben, der von der Restriktion von μ majorisiert wird. Da μ $\mathcal{L}$ -regulär ist, muß auch $\mathcal{G}'_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L}$ -regulär sein (5.5).

Folglich ist $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{L} \cap f(X)$ -regulär und kann daher gemäß (1.6) zu einem $\mathcal{L} \cap f(X)$ -regulären Inhalt $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{T} \cap f(X)$ fortgesetzt werden.

(ii) $\mathcal{T}_X := \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$ bzw. $\mathcal{L}_X$ bzw. $\mathcal{G}_X$ bezeichne das System der inversen Bilder von Mengen aus $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{G}$ unter der Abbildung f .

Es gilt $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(S \cap f(X)) : S \in \mathcal{T}\} = \{f^{-1}(S') : S' \in \mathcal{T} \cap f(X)\} = f^{-1}(\mathcal{T} \cap f(X)).$

Analog ist $\mathcal{L}_X = f^{-1}(\mathcal{L} \cap f(X)).$ $(\mathcal{L}_X, \mathcal{G}_X)$ ist wieder ein

Regularitätspaar, und $\mathcal{R}_X$ ist der von $\mathcal{G}_X$ erzeugte σ -Ring.

(iii) Für $S' = f^{-1}(S) \in \mathcal{R}_X$ setze man

$$\sigma(S') = \mathcal{G}(f(S')) = \mathcal{G}(S \cap f(X)).$$

Da $\mathcal{R}_X = f^{-1}(\mathcal{R} \cap f(X))$ und $\mathcal{K}_X = f^{-1}(\mathcal{K} \cap f(X))$ ist, ist σ ein $\mathcal{K}_X$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{R}_X$; außerdem ist σ auf $\mathcal{K}_X$ endlich.

Da f meßbar ist, gilt $\mathcal{R}_X \subset \mathcal{F}$. Ferner erfüllen $\mathcal{K}_X$ und $\mathcal{K}$ die Bedingung (*) des Satzes (5.6):

Sei nämlich $C' \in \mathcal{K}_X$, $C' = f^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{K}$ sowie $K \in \mathcal{K}$.

Dann gilt wegen (S): $C' \cap K = f^{-1}(C) \cap K \in \mathcal{K}$.

Nach dem Satz (5.9) ist der durch

$$\sigma_1(f^{-1}(S)) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{K} \\ K \subset f^{-1}(C) \subset f^{-1}(S)}} \sigma^*(K) \quad \text{definierte Inhalt } \sigma_1$$

auf $\mathcal{R}_X$ das größte von σ majorisierte $\mathcal{K}_X$ -reguläre Maß auf $\mathcal{R}_X$, das zu einem $\mathcal{K}$ -regulären Maß auf $\mathcal{F}$ fortgesetzt werden kann.

Sei ν eine derartige Fortsetzung und sei $\mu_1 = f(\nu) = f(\sigma_1)$.

Für jede Menge $S \in \mathcal{R}$ ergibt sich damit:

$$\mu_1(S) = \nu(f^{-1}(S)) = \sigma_1(f^{-1}(S)) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{K} \\ f(K) \subset C \subset S}} \sigma^*(K).$$

Da für jede $\mathcal{K}_X$ -beschränkte Menge $K \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \sigma^*(K) &= \inf_{\substack{S' \in \mathcal{R} \\ K \subset f^{-1}(S')}} \sigma(f^{-1}(S')) = \inf_{S' \in \mathcal{R}, f(K) \subset S'} \mathcal{G}(S' \cap f(X)) \\ &= \inf_{S' \in \mathcal{R}, f(K) \subset S'} \mu^*(S' \cap f(X)) = \mu^*(f(K)) \end{aligned}$$

gilt, folgt daraus

$$\mu_1(S) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{K} \\ f(K) \subset C \subset S}} \mu^*(f(K)). \quad \mu_1 \text{ ist } \mathcal{K}\text{-regulär, da } \sigma_1 \text{ } \mathcal{K}_X\text{-regulär ist.}$$

(iv) Sei $\lambda \leq \mu$ ein f -darstellbarer, $\mathcal{K}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{R}$. Dann existiert ein $\mathcal{K}$ -reguläres Maß β auf $\mathcal{F}$, so daß $\lambda = f(\beta)$ ist. Für eine Menge $K \in \mathcal{K}$, deren Bild $f(K)$ $\mathcal{K}$ -beschränkt ist, gilt dann:

$$B(K) \leq \inf_{\substack{S \in \mathcal{T} \\ K \subset f^{-1}(S)}} B(f^{-1}(S)) = \inf_{\substack{S' \in \mathcal{T} \\ f(K) \subset S'}} \lambda(S') = \lambda^*(f(K)) \leq \mu^*(f(K)).$$

Daraus folgt für $S \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \lambda(S) &= \sup_{\substack{C \in \mathcal{L} \\ C \subset S}} \lambda(C) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{L} \\ C \subset S}} B(f^{-1}(C)) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}, C \in \mathcal{L} \\ f(K) \subset C \subset S}} B(K) \leq \\ &\leq \sup \mu^*(f(K)) \leq \mu_1(S) \leq \mu(S). \end{aligned}$$

Folglich ist μ_1 der größte f -darstellbare Inhalt auf $\mathcal{T}$, der von μ majorisiert wird und $\mathcal{L}$ -regulär ist.

(v) μ_2 bezeichne den $\mathcal{L}$ -regulären Inhalt auf $\mathcal{T}$, der auf dem Ring der $\mathcal{L}$ -beschränkten Mengen aus $\mathcal{T}$ durch

$\mu_2(S) = \mu(S) - \mu_1(S)$ und auf den übrigen Mengen aus $\mathcal{T}$ durch den Fortsetzungsprozeß gemäß (1.6) definiert wird.

Es soll nun gezeigt werden, daß μ_2 f -diffus ist:

Für $K \in \mathcal{K}$, $C \in \mathcal{L}$ gilt gemäß (S) $f(K) \cap C = f(K \cap f^{-1}(C)) \in f(\mathcal{K})$.

Daher erfüllen die Systeme $\mathcal{L}$ und $f(\mathcal{K})$ die Bedingung (5.6(*)).

Sei $K \in \mathcal{K}$, $f(K)$ sei $\mathcal{L}$ -beschränkt. Dann ist für jede Obermenge $S \in \mathcal{T}$ von $f(K)$ und jede Teilmenge $C \in \mathcal{L}$ von S gemäß (iii)

$$\mu^*(f(K)) \leq \mu^*(f(K) \cap C) + \mu^*(f(K) \setminus C) \leq \mu_1(S) + \mu(S \setminus C).$$

Wegen der $\mathcal{L}$ -Regularität von μ folgt daraus $\mu^*(f(K)) = \mu_1^*(f(K))$.

Nach (5.2.ii) gilt damit $\mu_2^*(f(K)) = \mu^*(f(K)) - \mu_1^*(f(K)) = 0$.

μ_2 ist folglich $f(\mathcal{K})$ -diffus (5.8) und somit f -diffus.

(vi) Sei $\mu = \nu_1 + \nu_2$ eine zweite Zerlegung von μ in einen $\mathcal{L}$ -regulären, f -darstellbaren Inhalt ν_1 und einen $\mathcal{L}$ -regulären, f -diffusen Inhalt ν_2 . Wegen $\nu_1 \leq \mu_1$ (vgl. iv) gilt für $C \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mu_1(C) &= \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu^*(f(K)) = \sup (\nu_1^*(f(K)) + \nu_2^*(f(K))) = \\ &= \sup \nu_1^*(f(K)) \leq \nu_1(C) \leq \mu_1(C). \end{aligned}$$

Wegen der $\mathcal{L}$ -Regularität der Inhalte $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ muß

$\mu_1 = \nu_1$ und damit $\mu_2 = \nu_2$ sein. Folglich ist die Zerlegung von μ eindeutig bestimmt.

(vii) Es bleibt noch die Kennzeichnung der f -darstellbaren, $\mathcal{K}$ -regulären Inhalte nachzuweisen. Diese folgt aber unmittelbar aus den bereits bewiesenen Teilen der Behauptung./

(6.7.1) BEMERKUNG: Unter den allgemeinen Voraussetzungen des Satzes (6.7) ist die $f(\mathcal{K})$ -Regularität und damit die f -Darstellbarkeit des Maßes μ äquivalent mit der folgenden abgeschwächten Regularitätsbedingung:

Es gibt ein System $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit den Eigenschaften

(i) Zu jeder Menge $C \in \mathcal{K}$ existiert eine Obermenge $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E) < \infty$.

(ii) Für alle $E \in \mathcal{E}$ ist $\mu(E) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ f(K) \subset E}} \mu^*(f(K))$.

Ist insbesondere $\mathcal{K}$ eine σ -Algebra und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so kann man speziell $\mathcal{E} = \{X\}$ wählen. Zum Beweis der f -Darstellbarkeit von μ genügt es dann zu zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mu^*(f(K)) > 1 - \varepsilon$.

Beweis: Sei $C \in \mathcal{K}$ und $\varepsilon > 0$. Zu C existiert nach obiger Bedingung eine Obermenge $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E) < \infty$. Überdies gibt es eine Menge $K \in \mathcal{K}$ mit $f(K) \subset E$ sowie $\mu^*(f(K)) > \mu(E) - \varepsilon$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \mu(E) - \mu(E \setminus C) \leq \mu^*(f(K)) + \varepsilon - \mu(E \setminus C) \\ &\leq \mu^*(f(K) \cap C) + \mu^*(f(K) \cap (E \setminus C)) + \varepsilon - \mu(E \setminus C) \\ &\leq \mu^*(f(K) \cap C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen (S) ist $f(K) \cap C = f(K \cap f^{-1}(C)) \in f(\mathcal{K})$.

Da μ $\mathcal{K}$ -regulär ist, erhält man daraus die $f(\mathcal{K})$ -Regularität von μ ./

(6.8) SATZ: $(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ bzw. $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ seien Regularitätspaare auf zwei Mengen Y bzw. X .

(1) $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{R}$ seien die von $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}$ erzeugten Ringe.

$f: X \rightarrow Y$ bezeichne eine $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ -meßbare Abbildung.

Dann ist die Forderung

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{L} \text{ für alle Mengen } C \in \mathcal{K}$$

hinreichend dafür, daß die Abbildung f stark konservativ bezüglich $(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$ ist.

(2) Die beiden Regularitätspaare seien sogar kompakt.

$\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{Z}$ bezeichne den von $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}$ erzeugten

σ -Ring. $f: X \rightarrow Y$ sei eine $\mathcal{Z}$ - $\mathcal{R}$ -meßbare Abbildung, so daß von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ die Forderung (S) erfüllt wird.

Dann ist die folgende Bedingung hinreichend dafür, daß f bezüglich $(\mathcal{Z}, \mathcal{R}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$ stark konservativ ist:

Für jede Menge $C \in \mathcal{L}$ ist $f^{-1}(C)$ enthalten in der Vereinigung von abzählbar vielen Mengen aus $\mathcal{K}$.

Beweis: (1) Offenbar erfüllt f die Bedingung (6.6(S)).

Sei μ ein $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{Q}$, der von $f(X)$ schwach getragen wird und auf $\mathcal{L}$ endlich ist.

Für $C \in \mathcal{L}$ ist $f^{-1}(C) \in \mathcal{K}$ sowie $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$. Somit ist

$$\mu(C) = \mu^*(C \cap f(X)) = \mu^*(f(f^{-1}(C))) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu^*(f(K)) \leq \mu(C).$$

Der Inhalt μ ist f -darstellbar, da er $\mathcal{L}$ -regulär ist (6.6).

(2) Sei μ ein $\mathcal{L}$ -regulärer Inhalt auf $\mathcal{R}$, der von $f(X)$ schwach getragen wird und auf $\mathcal{L}$ endlich ist.

Zu $C \in \mathcal{L}$ existiert eine o.B.d.A. aufsteigende Folge (K_n) in $\mathcal{K}$, so daß $f^{-1}(C) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ gilt.

Da μ nach (4.2.iii) σ -additiv ist, folgt wegen (5.2.iv) und (F)

$$\mu(C) = \mu^*(C \cap f(X)) = \mu^*(f(f^{-1}(C))) = \mu^*(f(\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}(C) \cap K_n))) =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(f(f^{-1}(C) \cap K_n)) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu^*(f(K)) \leq \mu(C).$$

Somit gilt für jede Menge $C \in \mathcal{L}$: $\mu(C) = \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu^*(f(K)).$

Da μ $\mathcal{L}$ -regulär ist, erhält man aus (6.7) die f -Darstellbarkeit von μ .

Seien nun X und Y zwei Hausdorff-Räume.

$\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{Z}$) bezeichne für den Rest dieses Paragraphen das System der kompakten (offenen) Teilmengen von X bzw. Y .

Die Paare $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{L}, \mathcal{Z})$ sind kompakte Regularitätspaare.

$\mathcal{B}(X)$ bzw. $\mathcal{B}(Y)$ bezeichne den von $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{Z}$ erzeugten σ -Ring der Borelschen Mengen in X bzw. Y .

$f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung.

Dann ist f $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}(Y)$ -meßbar.

Für $C \in \mathcal{L}$ und $K \in \mathcal{K}$ ist $f^{-1}(C) \cap K \in \mathcal{K}$, da $f^{-1}(C)$ als inverses Bild einer abgeschlossenen Menge selbst abgeschlossen ist.

Damit ist die Bedingung (S) des Satzes (6.6) erfüllt.

Unter einem regulären Borelmaß auf einem Hausdorff-Raum Z soll ein kompakt-reguläres Maß auf der σ -Algebra der Borelschen Teilmengen von Z verstanden werden, welches auf den kompakten Teilmengen von Z endlich ist.

Sei μ ein reguläres Borelmaß auf Y und ν ein $\mathcal{K}$ -reguläres Maß auf $\mathcal{B}(X)$, so daß $f(\nu) \leq \mu$ ist. Dann ist ν sogar endlich auf $\mathcal{K}$, also ein reguläres Borelmaß auf X ,

da für jedes $K \in \mathcal{K}$ $f(K) \in \mathcal{L}$, und damit

$$\nu(K) \leq \nu(f^{-1}(f(K))) \leq \mu(f(K)) < \infty \text{ ist.}$$

Daher sind die folgenden Ergebnisse unmittelbare Konsequenzen der Sätze (6.7) und (6.8.2).

(6.9) SATZ: X und Y seien zwei Hausdorff-Räume,

$f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung.

Dann gibt es zu jedem regulären Borelmaß μ auf Y

zwei eindeutig bestimmte reguläre Borelmaße μ_1 und μ_2

auf X , die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

(ii) μ_1 ist f -darstellbar, d.h. μ_1 ist Bild eines regulären Borelmaßes auf X unter der Abbildung f .

(iii) μ_2 ist f -diffus, d.h. $\mu_2(f(K)) = 0$ für alle kompakten Teilmengen K von X .

Für alle Borelschen Teilmengen T von Y gilt:

$$\mu_1(T) = \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset T} \mu(f(K)).$$

(6.10) BEMERKUNG: Für den Spezialfall der lokal-kompakten Räume liefert der vorstehende Satz gerade den Zerlegungssatz von H.BAUER [5] (p.749), wenn man Radonmaße und reguläre Borelmaße in der üblichen Weise identifiziert.

(6.11) KOROLLAR: Ein reguläres Borelmaß μ auf Y ist genau dann f -darstellbar, wenn es bereits bezüglich der Bilder der kompakten Mengen aus X regulär ist.

(6.12) SATZ: X und Y seien zwei Hausdorff-Räume.

$f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung, so daß für jede kompakte Teilmenge C von Y die Menge $f^{-1}(C)$ Teilmenge einer K_σ -Menge ist ⁽¹⁾.

(1) Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt K_σ -Menge, wenn sie abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.

Dann ist f stark konservativ (bzgl. $(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(Y), \mathcal{K}, \mathcal{K})$).
Ist insbesondere X abzählbare Vereinigung kompakter
Teilmenge oder ist f eine eigentliche Abbildung ⁽¹⁾,
so ist f stark konservativ.

Beweis: Die starke Konservativität einer eigentlichen
Abbildung f folgt aus der Tatsache, daß für jede kompakte
Menge $C \subset Y$ die Menge $f^{-1}(C)$ wieder kompakt ist (BOURBAKI [9],
chap.I, § 10, n°2, prop.6)./

(6.13) BEMERKUNGEN: (i) Setzt man wie im Satz (6.12) voraus,
daß für jede kompakte Teilmenge $C \subset Y$ die Menge $f^{-1}(C)$ in
einer geeigneten K_σ -Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ (K_n kompakt) in X
enthalten ist, so gilt

$$C \cap f(X) = f(f^{-1}(C) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(f^{-1}(C) \cap K_n) \in \mathcal{K}(X).$$

Daher stimmen in diesem Falle die Begriffe "getragen" und
"schwach getragen" überein (vgl. (6.4), (6.5)).

(ii) Für den Spezialfall lokal-kompakter Räume ist der
vorstehende Satz bereits bei H.BAUER [5] (p.751, prop.2)
zu finden. Wegen (i) ist die dort bewiesene Konservativität
mit der starken Konservativität identisch.

(iii) In ähnlicher Weise wie die Borel-Maße kann man auch
die Baire-Maße auf Hausdorff-Räumen behandeln, indem man
für $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}$ die kompakten und für $\mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{G}$ die offenen
Baireschen Teilmengen von X bzw. Y wählt.

(¹) Eine stetige Abbildung eines Hausdorff-Raumes in einen
topologischen Raum ist gemäß BOURBAKI [9] (chap.I, § 10, n°2,
th.1) genau dann eigentlich, wenn sie abgeschlossen ist und
das inverse Bild jeder einpunktigen Menge kompakt ist.

§ 7 Fortsetzung stetiger Abbildungen zu eigentlichen
Abbildungen

Im vorangehenden Paragraphen hat sich gezeigt, daß die eigentlichen Abbildungen besonders einfache Beispiele konservativer Abbildungen sind (6.12). In Verallgemeinerung eines Satzes von H. BAUER [4] (S.414, Satz 3) über eigentliche Abbildungen lokal-kompakter Räume soll hier gezeigt werden, daß man jede stetige Abbildung eines vollständig regulären Raumes X in einen vollständig regulären Raum Y zu einer eigentlichen Abbildung fortsetzen kann, die auf einem geeigneten Oberraum von X definiert ist. Dieses Ergebnis wird im folgenden Paragraphen bei der Untersuchung der Konservativität stetiger Abbildungen polnischer Räume verwendet.

(7.1) SATZ: Seien X und Y zwei vollständig reguläre Räume, und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Dann existiert ein vollständig regulärer Raum $\tilde{X}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) X ist ein dichter Unterraum von $\tilde{X}$.
- (ii) f kann (auf genau eine Weise) zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ fortgesetzt werden.
- (iii) $\tilde{f}$ ist eine eigentliche Abbildung.

Sind X und Y lokal-kompakt, so ist auch $\tilde{X}$ lokal-kompakt. Ist X ein polnischer Raum, so kann $\tilde{X}$ so gewählt werden, daß X der Durchschnitt einer Folge offener F_σ -Mengen ⁽¹⁾ in $\tilde{X}$ ist.

⁽¹⁾ Unter einer F_σ -Menge versteht man die abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

Beweis: (1) Da X und Y vollständig regulär sind, gibt es kompakte Räume X_0 bzw. Y_0 , so daß X bzw. Y Unterräume von X_0 bzw. Y_0 sind (BOURBAKI [10], § 1, n°5, prop.3).

$f_0: X \rightarrow Y_0$ bezeichne die durch $f_0(x) := f(x)$ definierte stetige Abbildung; $f_0 \times f_0: X \times X \rightarrow Y_0 \times Y_0$ sei durch $(f_0 \times f_0)(x_1, x_2) := (f_0(x_1), f_0(x_2))$ definiert.

(2) Man kann o.B.d.A. annehmen, daß X und Y_0 nicht leer sind.

$\mathcal{U}_0$ bezeichne den Nachbarschaftsfilter auf $X \times X$, der durch die eindeutig bestimmte uniforme Struktur des kompakten Raumes X_0 induziert wird; $\mathcal{W}$ sei der Nachbarschaftsfilter der uniformen Struktur auf Y_0 .

Für $U_0 \in \mathcal{U}_0$ und $V \in \mathcal{W}$ setze man $U(V, U_0) := (f_0 \times f_0)^{-1}(V) \cap U_0$.

Dann ist das System $\mathcal{Z} := \{U(V, U_0) : U_0 \in \mathcal{U}_0, V \in \mathcal{W}\}$

nach BOURBAKI [9] (chap.II, § 2, n°3, prop.4) Basis des Nachbarschaftsfilters $\mathcal{U}$ einer uniformen Struktur auf X , und zwar der größten, die feiner ist als die zu $\mathcal{U}_0$ gehörige und für die außerdem die Abbildung f_0 gleichmäßig stetig ist.

Da f_0 stetig ist, induziert diese uniforme Struktur die Ausgangstopologie auf X ([9], chap.II, § 2, n°3, cor.).

(3) Nach BOURBAKI [9] (chap. II, § 4, n°2, prop.3) ist der uniforme Raum $(X, \mathcal{U})$ präkompakt, da $(X, \mathcal{U}_0)$ als Unterraum eines kompakten uniformen Raumes und $(Y_0, \mathcal{W})$ als kompakter Raum präkompakt sind. Somit ist die Vervollständigung $(\bar{X}, \bar{\mathcal{U}})$ von $(X, \mathcal{U})$ kompakt nach Definition der Präkompaktheit ([9], chap.II, § 4, n°2).

(4) Gemäß [9] (chap.II, § 3, n°6, th.2) kann man die Abbildung f_0 zu einer stetigen Abbildung $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow Y_0$ fortsetzen. Da $\bar{X}$ kompakt ist, ist die Abbildung $\bar{f}$ eigentlich ([9], chap.I, § 10, n°2, cor.2 du th.1).

Setzt man $\tilde{X} := \bar{f}^{-1}(Y)$ und definiert man die Abbildung $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ durch $\tilde{f}(\tilde{x}) := \bar{f}(\tilde{x})$ für $\tilde{x} \in \tilde{X}$, so ist $\tilde{f}$ eine stetige Fortsetzung von f auf den vollständig regulären Raum $\tilde{X}$. $\tilde{f}$ ist sogar eine eigentliche Abbildung wegen [9] (chap.I, § 10, n°1, prop.3). X liegt dicht in $\bar{X}$, also auch in $\tilde{X}$.

(5) Ist $Y \subset Y_0$ lokal-kompakt, so ist Y Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von Y_0 . Wegen der Stetigkeit von $\bar{f}$ ist dann $\tilde{X} = \bar{f}^{-1}(Y)$ Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge des kompakten Raumes $\bar{X}$, also lokal-kompakt.

(6) Sei X ein polnischer Raum. Dann kann der kompakte Oberraum X_0 von X so gewählt werden, daß X Durchschnitt einer Folge offener K_σ -Mengen in X_0 ist (BOURBAKI [10], § 6, n°1, cor.1 du th.1; § 2, n°5, prop. 7).

Die kanonische Injektion $i: X \rightarrow X_0$ ist gleichmäßig stetig, bezogen auf die uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf X und die eindeutig bestimmte uniforme Struktur auf dem kompakten Raum X_0 (2). Sie kann daher zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $\tilde{i}: \tilde{X} \rightarrow X_0$ fortgesetzt werden (BOURBAKI [9], chap.II, § 3, n°6, th.2).

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\tilde{i}(\tilde{x}) \in X$. Da X dicht in $\tilde{X}$ liegt, ist $\tilde{x}$ Limes eines Filters $\mathcal{f}$ in X . Der Bildfilter $\tilde{i}(\mathcal{f}) = \mathcal{f}$ konvergiert dann gegen $\tilde{i}(\tilde{x})$. Folglich ist $\tilde{x} = \tilde{i}(\tilde{x}) \in X$. Somit gilt $\tilde{i}^{-1}(X) = X$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{i}$ ist daher X der

Durchschnitt einer Folge off. F_σ -Mengen in $\tilde{X}$.

(7.2) BEMERKUNG: Bei H. BAUER [4] (S. 415 Hilfs 4) erfüllt der Raum $\tilde{X}$ noch die zusätzliche Bedingung, daß $\tilde{X} \setminus X$ durch $\tilde{f}$ homöomorph auf eine Teilmenge von Y abgebildet wird. Das kann man in der allgemeineren Situation der nicht notwendig lokal-kompakten vollständig regulären Räume nicht erwarten, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei X vollständig regulär, aber nicht lokal-kompakt;

$Y := \{y\}$ sei ein einelementiger topologischer Raum;

für alle $x \in X$ sei $f(x) = y$.

Wenn $\tilde{X}$ und $\tilde{f}$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) des vorstehenden Satzes erfüllen, muß $\tilde{X} = \tilde{f}^{-1}(Y)$ als inverses Bild einer kompakten Menge unter einer eigentlichen Abbildung selbst wieder kompakt sein.

Wenn $\tilde{X} \setminus X$ zu einer Teilmenge von Y homöomorph ist, kann $\tilde{X} \setminus X$ höchstens aus einem Element bestehen.

Da X nicht kompakt ist, gilt $\tilde{X} \setminus X \neq \emptyset$.

Wäre aber $\tilde{X} \setminus X = \{x\}$ einelementig, so müßte $X = \tilde{X} \setminus \{x\}$ sein.

Damit wäre X als offener Unterraum von $\tilde{X}$ lokal-kompakt im Widerspruch zur Voraussetzung.

§ 8 Konservativität der stetigen Abbildungen
polnischer Räume

Aus dem Satz (6.12) folgt, daß insbesondere jede stetige Abbildung eines lokal-kompakten Raumes X mit abzählbarer Basis in einen Hausdorff-Raum Y stark konservativ ist.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die vorstehende Aussage auch noch zutrifft, falls X zur größeren Klasse der polnischen Räume gehört.

Es werden hier die Bezeichnungen des zweiten Teils von § 6 übernommen.

(8.1) SATZ: Sei X ein polnischer und Y ein Hausdorffscher topologischer Raum.

Dann ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stark konservativ (bzgl. $(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y), \mathcal{K}, \mathcal{L})$).

Es sollen zwei verschiedene Beweise für den Satz (8.1) angegeben werden. Der erste beruht auf den Ergebnissen der §§ 6 und 7, im zweiten wird die Behauptung auf direktem Wege unter Anwendung einiger Tatsachen aus der Theorie der analytischen Mengen bewiesen.

1. Beweis: (i) Sei μ ein reguläres Borelmaß auf Y , das von $f(X)$ schwach getragen wird.

Zu zeigen ist nach (6.11) und wegen der $\mathcal{L}$ -Regularität von μ , daß für jedes $C \in \mathcal{L}$ $\mu(C) = \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu(f(K))$ ist.

(ii) Es wird nun eine beliebige, aber fest gewählte Menge $C \in \mathcal{L}$ betrachtet:

Sei $X' := f^{-1}(C)$ und $f': X' \rightarrow C$ die Restriktion der Abbildung f . X' ist wieder ein polnischer Raum (BOURBAKI [10], § 6, n° 1, prop. 1a).

(iii) Nach (7.1) existieren ein Oberraum $\tilde{X}$ von X' und eine Fortsetzung $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow C$ von f' zu einer eigentlichen Abbildung. $\tilde{X}$ kann dabei überdies so gewählt werden, daß X' Durchschnitt einer Folge (G_n) von F_σ -Mengen in $\tilde{X}$ ist. Jede der Mengen G_n hat die Gestalt $G_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_n^m$, wobei die Mengen K_n^m abgeschlossene Teilmengen von $\tilde{X}$ sind. Da $\tilde{X} = \tilde{f}^{-1}(C)$ als inverses Bild eines kompakten Raumes unter einer eigentlichen Abbildung kompakt ist, sind die Mengen K_n^m ($n, m \in \mathbb{N}$) ebenfalls kompakt. O.B.d.A. kann jede Folge $(K_n^m)_{n, m \in \mathbb{N}}$ aufsteigend gewählt werden.

(iv) Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Durch vollständige Induktion soll eine absteigende Folge (K_n) kompakter Mengen $K_n \subset G_n$ konstruiert werden, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(\tilde{f}(K_n \cap X')) > \mu(C) - \varepsilon \text{ ist.}$$

$$(\alpha) \text{ Es gilt } G_1 \supset X', \text{ also } X' = \bigcup_{m=1}^{\infty} (X' \cap K_1^m).$$

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \mu^*(C \cap f(X)) = \mu^*(\tilde{f}(X')) = \mu^*\left(\tilde{f}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (X' \cap K_1^m)\right)\right) = \\ &= \mu^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{f}(X' \cap K_1^m)\right) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu^*(\tilde{f}(X' \cap K_1^m)). \end{aligned}$$

Es existiert folglich ein Index m_1 , so daß für $K_1 := K_1^{m_1}$

$$\mu^*(\tilde{f}(X' \cap K_1)) > \mu(C) - \varepsilon \text{ ist.}$$

(\beta) Sei $K_n \subset K_{n-1} \cap G_n$ konstruiert und sei

$$\mu^*(\tilde{f}(K_n \cap X')) > \mu(C) - \varepsilon.$$

Es ist $K_n \cap X' \subset X' \subset G_{n+1}$, also $K_n \cap X' = \bigcup_{m=1}^{\infty} (K_n \cap X' \cap K_{n+1}^m)$.

Daraus erhält man:

$$\mu(C) \geq \mu^*(\tilde{f}(K_n \cap X')) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mu^*(\tilde{f}(K_{n+1}^m \cap X' \cap K_n)) > \mu(C) - \varepsilon.$$

Es gibt daher einen Index m_{n+1} , so daß für

$$K_{n+1} := K_{n+1}^{m_{n+1}} \cap K_n \text{ gilt:}$$

$$\mu^*(\tilde{f}(X' \cap K_{n+1})) > \mu(C) - \varepsilon.$$

Damit ist die Existenz der Folge (K_n) bewiesen.

$$(v) \text{ Aus (iv) ergibt sich } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(K_n)\right) \geq \mu(C) - \varepsilon.$$

Da die Folge (K_n) fällt, ist nach MEYER [19] (p.56, T6)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(K_n) = \tilde{f}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right).$$

Für die kompakte Menge $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X'$ erhält man daher

$$\mu(f(K)) = \mu(\tilde{f}(K)) \geq \mu(C) - \varepsilon.$$

(vi) Da $C \in \mathcal{L}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden können, folgt $\mu(C) = \sup_{K \in \mathcal{K}, f(K) \subset C} \mu(f(K))$ für alle Mengen $C \in \mathcal{L}$./

Der zweite Beweis des Satzes (8.1) beruht auf den beiden folgenden Lemmata:

(8.2) LEMMA: Sei Y ein Hausdorff-Raum und μ ein beschränktes reguläres Borelmaß auf Y .

Dann gehört jede analytische Menge $(^1) A \subset Y$ zur

μ -Vervollständigung $(^2) \mathcal{L}^\mu$ der σ -Algebra $\mathcal{B}(Y)$ der Borelschen Teilmengen von Y .

Beweis: Da μ σ -additiv und $\mathcal{B}(Y)$ ein σ -Ring ist, ist μ^* ein äußeres Maß im Sinne von CARATHEODORY.

Die folgenden Eigenschaften von μ^* sind ohne Schwierigkeiten einzusehen:

(¹) Gemäß SION [20] (p.769, 2.1.4) soll unter einer analytischen Menge das stetige Bild des Durchschnitts einer Folge von K_σ -Mengen in einem topologischen Raum verstanden werden.

(²) Man vergleiche etwa die Definition von COURREGE [13] (II.2.4, déf. 3A).

(i) Zu jeder Menge $B \subset A$ existiert eine Obermenge $B' \in \mathcal{L}(Y)$, so daß $\mu^*(B') = \mu(B') = \mu^*(B)$ ist; B' ist dabei gemäß BERBERIAN [6] (sect. 6, th. 1) μ^* -meßbar ⁽¹⁾.

(ii) Alle kompakten Teilmengen C von Y sind μ^* -meßbar.

(iii) Sei C eine kompakte Teilmenge von A , $T \subset Y$, $\epsilon > 0$.

Dann existiert eine offene Obermenge U von C , so daß

$\mu(U \setminus C) < \epsilon$ ist (vgl. 2.5). Daher ist

$$\mu^*(U \cap T) \leq \mu^*(C \cap T) + \mu^*((U \setminus C) \cap T) \leq \mu^*(C \cap T) + \mu(U \setminus C) \leq \mu^*(C \cap T) + \epsilon.$$

Gemäß SION [20] (p. 775, th. 4.3) folgt aus (i)-(iii), daß die analytische Menge A eine μ^* -meßbare Menge ist und somit zur μ -Vervollständigung von $\mathcal{L}(Y)$ gehört (BERBERIAN [6], sect. 9, th. 2)./

(8.3) LEMMA: Sei X ein polnischer und Y ein hausdorffscher topologischer Raum; $f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige Surjektion, μ sei ein beschränktes reguläres Borelmaß auf Y . Dann existiert eine Abbildung $\gamma: Y \rightarrow X$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $f \circ \gamma$ ist die identische Abbildung von Y , d.h.

γ ist ein Schnitt bezüglich f .

(ii) γ ist $\mathcal{L}^\mu(Y)$ - $\mathcal{L}(X)$ -meßbar.

Der folgende Beweis ist dem Beweis eines Satzes bei BOURBAKI ([10], § 6, n° 8, th. 4) nachgebildet.

Beweis: Sei d eine vollständige Metrik auf X , die mit der Topologie von X verträglich ist. $\mathcal{A}(X)$ bezeichne das System der abgeschlossenen Teilmengen von X . O.B.d.A. sei $X \neq \emptyset$.

⁽¹⁾ Nach BERBERIAN [6] (sect. 5) heißt eine Menge $D \subset Y$, μ^* -meßbar, wenn $\mu^*(T \cap D) + \mu^*(T \setminus D) = \mu^*(T)$ für jedes $T \subset Y$ gilt.

(1) Nach BOURBAKI [10] (§ 6, n°5, déf.7) versteht man unter einem Sieb (crible) eine Folge $Z = (Z_n, p_n)_{n=0,1,\dots}$, derart daß für $n = 0, 1, \dots$ Z_n eine abzählbare Menge und p_n eine Surjektion von Z_{n+1} auf Z_n ist. Eine Siebung (criblage) von X ist gemäß [10] (§ 6, n°5) gegeben durch ein Sieb $Z = (Z_n, p_n)$ sowie eine Folge $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots}$ von Abbildungen $\mathcal{F}_n: Z_n \rightarrow \mathcal{A}(X) \setminus \{\emptyset\}$ mit nachstehenden Eigenschaften:

$$(a) \quad X = \bigcup_{z \in Z_0} \mathcal{F}_0(z).$$

$$(b) \quad \text{Für } n = 0, 1, 2, \dots \text{ und } z \in Z_n \text{ gilt } \mathcal{F}_n(z) = \bigcup_{z' \in p_n^{-1}(z)} \mathcal{F}_{n+1}(z').$$

$$(c) \quad \text{Für } n = 0, 1, \dots \text{ und jedes } z \in Z_n \text{ hat die Menge } \mathcal{F}_n(z) \text{ einen Durchmesser } \leq 2^{-n}.$$

Da X ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis ist, existiert eine derartige Siebung von X ([10], § 6, n°5, lemme 3).

(2) Jede Borelsche Teilmenge von X ist stetiges Bild eines polnischen Raumes (BOURBAKI [10], § 6, n°3, prop.11; n°2, déf.2) und somit stetiges Bild des Durchschnitts einer Folge von K_G -Mengen in einem kompakten, metrisierbaren Raum ([10], § 6, n°1, cor.1 du th.1; § 2, n°5, prop.7).

Da jede der Mengen $\mathcal{F}_n(z)$ eine abgeschlossene, also Borelsche Menge in X ist, ist daher $f(\mathcal{F}_n(z))$ eine analytische Menge in Y (vgl. S.63, Fußnote (1)). Folglich gilt $f(\mathcal{F}_n(z)) \in \mathcal{L}^1(Y)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle $z \in Z_n$ (8.2). Daher gibt es Borelsche Mengen $G_n(z), G'_n(z) \subset Y$, so daß $G_n(z) \subset f(\mathcal{F}_n(z)) \subset G'_n(z)$ sowie $\mu(G'_n(z) \setminus G_n(z)) = 0$ gilt. Da jede der Mengen Z_n abzählbar ist, ist auch $N_n = \bigcup_{z \in Z_n} (G'_n(z) \setminus G_n(z))$ und damit auch $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$ eine Borelsche μ -Nullmenge.

Man setze $W = \mathbb{N}$ und für $n = 0, 1, 2, \dots$ sowie $z \in Z_n$

$$F_n(z) = G_n(z) \cap W = f(\mathcal{F}_n(z)) \cap W = G'_n(z) \cap W.$$

Jede der Mengen $F_n(z')$ ist eine Borelsche Menge.

Da die Mengen Z_n abzählbar sind, gibt es jeweils eine totale Ordnung $\leq$ in Z_n , so daß jede Teilmenge $M \neq \emptyset$ von Z_n ein in dieser Ordnung kleinstes Element besitzt.

Für $z \in Z_0$ sei

$$g_0(z) = f^{-1}(F_0(z)) \quad \text{und} \quad h_0(z) = \bigcap_{z' < z, z' \in Z_0} \{g_0(z')\}.$$

Für $n = 1, 2, \dots$ und $z \in Z_n$ definiere man:

$$g_n(z) = f^{-1}(F_n(z)) \quad \text{sowie}$$

$$h_n(z) = \bigcap_{\substack{z' < z \\ p_{n-1}(z') = p_{n-1}(z)}} \{g_n(z')\}.$$

Aus der Definition der auftretenden Mengen und der Borel-Meßbarkeit der stetigen Abbildung f folgt, daß jede der Mengen $h_n(z)$ eine Borelsche Menge in X ist.

Ferner gilt für jedes $z \in Z_n$: $g_n(z) = f^{-1}(F_n(z)) \subset f^{-1}(f(\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z)))$.

(3) Sei $y \in W$ und $H = f^{-1}(y)$.

Es soll gezeigt werden, daß für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt:

- (a) Es gibt genau ein $z \in Z_n$, so daß $h_n(z) \cap H \neq \emptyset$ ist.
- (b) Für dieses z ist $h_n(z) \cap H = \bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H$.

(i) Für $n = 0$ bezeichne $z \in Z_0$ das kleinste Element aus Z_0 , so daß $\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H \neq \emptyset$ ist (ein solches z existiert nach Definition einer Siebung).

Dann ist $y \in f(\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z))$ und somit $y \in f(\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z)) \cap W = G_0(z) \cap W = F_0(z)$, d.h. $H \subset g_0(z)$.

Für $z' < z$ folgt aus der Minimalität von z :

$y \notin f(g_0(z'))$ und daher

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H \cap g_0(z') \subset H \cap f^{-1}(f(g_0(z'))) = \emptyset, \text{ also}$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z'). \quad \text{Daraus erhält man:}$$

$$h_0(z) \cap H = \bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H \cap \bigcap_{\substack{z' \in Z_0 \\ z' < z}} \bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z') = \bigcap_{n=0}^{\infty} g_n(z) \cap H \neq \emptyset.$$

Hingegen gilt für $z < z$

$$h_0(z') \cap H \subset \mathcal{F}_0(z') \cap H = \emptyset \text{ sowie für } z' > z$$

$$h_0(z') \cap H \subset \mathcal{G}_0(z) \cap H = \emptyset.$$

Damit sind (a) und (b) für $n=0$ bewiesen.

(ii) Für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seien (a) und (b) bewiesen.

Nach (a) existiert genau ein Element $z \in \mathbb{Z}_n$, so daß

$h_n(z) \cap H \neq \emptyset$ ist. Es gilt nach (1 b):

$$h_n(z) \subset \mathcal{F}_n(z) = \bigcup_{u \in p_n^{-1}(z)} \mathcal{F}_{n+1}(u).$$

Daher gibt es ein kleinstes Element $u \in p_n^{-1}(z)$, so daß

$$\mathcal{F}_{n+1}(u) \cap H \neq \emptyset \text{ ist.}$$

Dann ist $y \in f(\mathcal{F}_{n+1}(u))$ und somit

$$y \in f(\mathcal{F}_{n+1}(u)) \cap W = G_{n+1}(u) \cap W = F_{n+1}(u), \text{ d.h. } H \subset G_{n+1}(u).$$

Für $u' < u$, $u' \in p_n^{-1}(z)$ folgt aus der Minimalität von u :

$y \notin f(\mathcal{F}_{n+1}(u'))$ und daher

$$\mathcal{F}_{n+1}(u) \cap H \cap G_{n+1}(u') \subset H \cap f^{-1}(f(\mathcal{F}_{n+1}(u'))) = \emptyset.$$

Wegen (b) und $\mathcal{F}_{n+1}(u) \subset \mathcal{F}_n(z)$ ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} (*) \quad h_{n+1}(u) \cap H &= \mathcal{F}_{n+1}(u) \cap H \cap h_n(z) \cap \bigcup_{\substack{u' \in p_n^{-1}(z) \\ u' < u}} \mathcal{G}_{n+1}(u') = \\ &= \mathcal{F}_{n+1}(u) \cap H \cap \mathcal{F}_n(z) \cap \bigcup_{\substack{u' \in p_n^{-1}(z) \\ u' < u}} \mathcal{G}_{n+1}(u') = \mathcal{F}_{n+1}(u) \cap H \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Sei $u' \in p_n^{-1}(z)$. Aus $u' < u$ folgt dann

$h_{n+1}(u') \cap H \subset \mathcal{F}_{n+1}(u') \cap H = \emptyset$, desgleichen ergibt sich für $u' > u$

$$h_{n+1}(u') \cap H \subset \mathcal{G}_{n+1}(u) \cap H = \emptyset.$$

Ist dagegen $p_n(u') \neq z$, so gilt wegen der Eindeutigkeit von z

$$H \cap h_{n+1}(u') \subset H \cap h_n(p_n(u')) = \emptyset.$$

Damit ist (a) und wegen (*) auch (b) für $n+1$ statt n bewiesen.

Folglich sind (a) und (b) für alle $n=0,1,2,\dots$ erfüllt.

(4) Für $n=0,1,2,\dots$ ist die Menge $S_n = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_n} h_n(z)$ eine

Borelsche Menge, da Z_n abzählbar ist und da die Mengen $h_n(z)$ Borelsche Mengen sind.

Ferner gilt $S_{n+1} \subset S_n$ für alle n , da stets

$h_{n+1}(z) \subset h_n(p_n(z))$ ist.

Die Menge $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ ist ebenfalls eine Borelsche Menge.

Für jedes $y \in W$ soll nun gezeigt werden, daß S die Menge $H = f^{-1}(y)$ in genau einem Punkte trifft:

$z_n(H)$ bezeichne das eindeutig bestimmte Element $z \in Z_n$ mit der Eigenschaft $h_n(z) \cap H \neq \emptyset$.

Die Folge $(\mathcal{P}_n(z_n(H)) \cap H)_{n=0,1,\dots}$ ist eine absteigende Folge nicht-leerer abgeschlossener Mengen. Nach Definition einer Siebung ist sie Basis eines Cauchy-Filters (1 c).

Die Menge $\bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathcal{P}_n(z_n(H)) \cap H) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (S_n \cap H) = S \cap H$ der adhärennten Punkte dieses Filters enthält daher genau ein Element, den Limes.

(5) Für $y \in W$ sei $\gamma(y)$ das einzige Element der Menge $S \cap f^{-1}(y)$, für $y \in Y \setminus W$ sei $\gamma(y)$ ein beliebiges Element $x \in f^{-1}(y)$. Dann ist γ eine Abbildung von Y in X , und $f \circ \gamma$ ist die identische Abbildung von Y .

γ ist $\mathcal{L}^\mu(Y)$ - $\mathcal{L}(X)$ -meßbar:

Es ist zu zeigen, daß für jede Borelsche Menge $A \subset X$

$\gamma^{-1}(A) \in \mathcal{L}^\mu(Y)$ ist:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(A) &= \gamma^{-1}(A \cap \gamma(Y)) = \gamma^{-1}(A \cap \gamma(W)) \cup \gamma^{-1}(A \cap \gamma(W)) = \\ &= f(A \cap S \cap f^{-1}(W)) \cup f(A \cap \gamma(W)). \end{aligned}$$

$A \cap S \cap f^{-1}(W)$ ist eine Borelsche Menge in X . Wie in (2) erhält man daraus $f(A \cap S \cap f^{-1}(W)) \in \mathcal{L}^\mu(Y)$.

Da außerdem $f(A \cap \gamma(W))$ Teilmenge der μ -Nullmenge $W = N$ ist, folgt $\gamma^{-1}(A) \in \mathcal{L}^\mu(Y)$.

2. Beweis des Satzes (8.1):

Sei μ ein reguläres Borelmaß auf Y , das von $f(X)$ schwach getragen wird. C sei eine kompakte Teilmenge von Y und $\mu' = 1_C \mu$. Nach (8.2) gilt $C \cap f(X) \in \mathcal{B}^\mu(Y)$. Da $C \cap f(X) \subset C$ ist, folgt daraus $C \cap f(X) \in \mathcal{B}^\mu(Y)$ und daher

$$\mu^*(C \cap f(X)) = \sup_{\substack{C' \subset C \cap f(X) \\ C' \text{ kompakt}}} \mu(C').$$

Sei $C_0 \subset C \cap f(X)$ kompakt. Dann ist $X_0 = f^{-1}(C_0)$ ein abgeschlossener und damit polnischer Unterraum von X . Die Restriktion $f_0: X_0 \rightarrow C_0$ von f ist eine stetige Surjektion; die Restriktion μ_0 von μ auf die Borelschen Teilmengen von C_0 ist ein beschränktes reguläres Borelmaß auf C_0 . Nach dem Lemma (8.3) gibt es daher zu f_0 einen $\mathcal{B}^{\mu_0}(C_0)$ - $\mathcal{B}(X_0)$ -meßbaren Schnitt $\gamma: C_0 \rightarrow X_0$. Bezeichnet man die Vervollständigung von μ_0 wieder mit μ_0 , so ist $\nu_0 = \gamma(\mu_0)$ ein beschränktes reguläres Borelmaß auf X_0 . Es gilt $\mu_0 = f_{0*}(\nu_0)$, da $f_0 \circ \gamma$ die identische Abbildung ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} \mu(C_0) &= \mu_0(C_0) = \nu_0(X_0) = \sup_{\substack{K \text{ kp.} \\ K \subset X_0}} \nu_0(K) = \sup_{\substack{K \text{ kp.} \\ f(K) \subset C_0}} \mu_0(\gamma^{-1}(K)) = \\ &= \sup \mu_0(f(K)) = \sup \mu(f(K)). \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich für alle kompakten Teilmengen C von Y :

$$\mu(C) = \sup_{\substack{K \text{ kp.} \\ f(K) \subset C}} \mu(f(K)), \text{ also nach (6.9) die Behauptung.}$$

(8.4) BEMERKUNG: Ist μ ein beschränktes reguläres Borelmaß auf Y und f eine Surjektion, so braucht man nicht auf (6.9) zurückzugreifen, sondern kann bei leichter Abänderung des Beweises ein Urbildmaß ν von μ direkt als Bildmaß des Maßes μ unter dem Schnitt $\gamma: Y \rightarrow X$ angeben (vgl. 8.3). In diesem Falle hat ν also die zusätzliche Eigenschaft, daß es von der Schnittmenge $\gamma(Y)$ getragen wird.

Literaturverzeichnis

BAUER, H.:

- [1] Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.
Berlin 1968.
- [2] Konvexität in topologischen Vektorräumen.
Vorlesungsausarbeitung, Hamburg 1964.
- [3] Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen
eines Verbandes. Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.,
math.-nat. Klasse 1953, 89-117 (1954).
- [4] Konservative Abbildungen lokal-kompakter Räume.
Math. Annalen 138, 398-427 (1959).
- [5] Mesures avec une image donnée. Rev. Roumaine Math.
Pures et Appl. 11/7, 747-752 (1966).

BERBERIAN, ST.K.:

- [6] Measure and Integration. New York 1965.

BIERLEIN, D.:

- [7] Über die Fortsetzung von Wahrscheinlichkeitsfeldern.
Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 28-46 (1962).

BIRKHOFF, G.:

- [8] Lattice theory (revised edition).
Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. XXV (1948).

BOURBAKI, N.:

- [9] Topologie générale, chap. I-II (3^e édition).
Act. Sci. et Ind. 1142, Paris 1961.
- [10] Topologie générale, chap. IX (2^e édition).
Act. Sci. et Ind. 1045, Paris 1958.
- [11] Intégration, chap. I-IV (2^e édition).
Act. Sci. et Ind. 1175, Paris 1965.

CHOQUET, G.:

- [12] Axiomatique des mesures maximales. Application aux cônes
convexes faiblement complets. C.R. Acad. Sc. Paris 255,

37-39 (1962).

COURREGE, P.:

- [13] Théorie de la mesure (2^e édition). CDU, Paris 1965.

DINCULEANU, N.:

- [14] Vector measures. Oxford 1967.

HALMOS, P.R.:

- [15] Measure Theory. Princeton 1950.

HARDY, J. - LACEY, H.E.:

- [16] Extensions of regular Borel measures.
Pacific J. Math. XXIV, 277-282 (1968).

HERZ, C.S.:

- [17] The spectral theory of bounded functions.
Trans. Amer. Math. Soc. 94, 181-232 (1960).

MARCZEWSKI, E.:

- [18] On Compact Measures. Fund. Math. 40, 113-124 (1953).

MEYER, P.A.:

- [19] Probabilités et potentiel. Act. Sci. et Ind. 1318,
Paris 1966.

SION, M.:

- [20] Topological and measure theoretic properties of analytic sets. Proc. Amer. Math. Soc, 11, 769-776 (1960).

YOSIDA, K. - HEWITT, E.:

- [21] Finitely additive measures.
Trans. Amer. Math. Soc. 72, 46-66 (1952).

Lebenslauf

Am 10. Januar 1942 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Kurt Lembcke und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Weselmann, in Hamburg geboren. Im Februar 1943 fiel mein Vater. Nach dem Besuch der Grundschule in Hoopte (Ldkr. Harburg) und der Johann-Peter-Eckermann-Schule in Winsen/Luhe war ich bis zur Reifeprüfung Schüler des Gymnasiums St. Georg in Hamburg.

Anschließend, im Sommersemester 1961, begann ich das Studium der Mathematik an der Universität Hamburg. Ich hörte dort Vorlesungen bei den Professoren Bauer, Bureau, Collatz, Kähler, Karzel, Meyer, Schoeneberg, Sperner und v. Weizsäcker. Im Juli 1964 bestand ich die Diplom-Vorprüfung für Mathematik. Vom Wintersemester 1965 an setzte ich mein Studium an der Universität Erlangen-Nürnberg fort. Seit November 1965 bin ich als studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft am mathematischen Institut in Erlangen beschäftigt. Ich nahm hier an Vorlesungen und Seminaren der Professoren Bauer und Jacobs teil. Im Februar 1967 legte ich die Diplom-Prüfung für Mathematik ab. Seitdem bin ich Doktorand bei Herrn Prof. Dr. H. Bauer in Erlangen.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
